Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1968

УДК 538.566

Л. И. ПРИХОДЬКО

О ВЫЧИСЛЕНИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ ВОЛНЫ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ С РЕГУЛЯРНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Во втором приближении метода возмущений вычислено среднее поле волны в слое со случайными неоднородностями, средняя диэлектрическая проницаемость которого изменяется по экспоненциальному закону $\bar{\varepsilon}(z)=e^{-bz}$. Получены выражения для коэффициентов отражения среднего поля. Для частного случая малых углов падения волны приводится количественная характеристика эффекта затухания среднего поля на выходе из ионосферного слоя.

Рассмотрению влияния рассеяния волн характеристическими неоднородностями среды на среднее (регулярное) поле посвящены работы [1—5], в которых применялся метод возмущений, связанный с использованием малого параметра μ-флуктуаций диэлектрической проницаемости среды. В работе [1] для слабонеоднородной изотропной среды было найдено выражение для комплексной эффективной диэлектрической проницаемости и исследовался эффект затухания и изменения фазовой скорости среднего поля за счет рассеяния на флуктуациях. В [2, 3] были сделаны различные обобщения результатов работы [1]. В [4] получены выражения для тензора эффективной диэлектрической проницаемости слабонеоднородной магнитоактивной плазмы. В работе [5] с помощью функции Грина для волнового уравнения в среде со случайными неоднородностями вычислено среднее поле волны в виде ряда, отличного от ряда обычной теории возмущений. Во всех перечисленных статьях предполагалось, что средние параметры среды (в данном случае диэлектрическая проницаемость) постоянны. Однако особое внимание привлекает совместное рассмотрение хаотических неоднородностей среды и регулярного изменения диэлектрической проницаемости ε. Настоящая работа посвящена вычислению среднего поля в такой среде.

Постановка задачи. Математическая сложность заставляет взять частный вид регулярного изменения диэлектрической проницаемости и рассматривать не электромагнитное векторное поле, а плоскую скалярную монохроматическую волну, падающую на неоднородный плазменный слой под углом θ_0. Диэлектрическую проницаемость слоя представим в виде суммы двух слагаемых

$$\varepsilon=\bar{\varepsilon}(z)+\mu(x, y, z), \tag{1}$$

где $\bar{\varepsilon}(z)$ — средняя диэлектрическая проницаемость, детерминированная функция одной координаты; $\mu(x, y, z)$ — флуктуационная часть, случайная функция координат, причем флуктуации предполагаются малыми, т. е. $\sqrt{\overline{\mu^2}} \ll 1$, а $\bar{\mu} = 0$.

При зависимости от времени $e^{-i\omega t}$ полное поле в среде должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 E + k_0^2 \varepsilon E = 0. \tag{2}$$

Поле E также представим в виде суммы двух слагаемых [6]

$$E = \bar{E} + \xi, \tag{3}$$

где $\bar{E}$ — статистически среднее поле, а ξ — флуктуационный член (рассеянное поле), причем $\bar{\xi} = 0$. Подставляя (1) и (3) в (2), получим после статистического усреднения систему уравнений для $\bar{E}$ и ξ:

$$\nabla^2 \bar{E} + k_0^2 \bar{\varepsilon}(z) \bar{E} = -k_0^2 \overline{\mu\xi}, \tag{4}$$

$$\nabla^2 \xi + k_0^2 \bar{\varepsilon}(z) \xi = -k_0^2 [\mu \bar{E} + (\mu\xi - \overline{\mu\xi})]. \tag{5}$$

Предполагая $\xi \ll \bar{E}$, что гарантируется достаточной абсолютной малостью флуктуаций μ [7], в уравнении для ξ можно пренебречь разностью $\mu\xi - \overline{\mu\xi}$, тогда

$$\nabla^2 \xi + k_0^2 \bar{\varepsilon}(z) \xi = -k_0^2 \mu \bar{E}. \tag{6}$$

Таким образом, задача вычисления среднего поля сводится к нахождению решения уравнения (4). Это приводит к необходимости вычисления $\overline{\mu\xi}$, а следовательно, рассеянного поля ξ. Уравнение (6) будем решать по методу возмущений. Тогда среднее поле $\bar{E}$ в правой части (6) в первом приближении можно заменить невозмущенным полем, когда $\mu = 0$.

Вычисление невозмущенного поля. Рассмотрим полубесконечный неоднородный слой, средняя диэлектрическая проницаемость которого изменяется по экспоненциальному закону $\bar{\varepsilon}(z) = e^{-bz}$ $(z \geqslant 0)$. Волновое уравнение для невозмущенного поля имеет вид

$$\nabla^2 E_0 + k_0^2 \bar{\varepsilon}(z) E_0 = 0. \tag{7}$$

Предположим, что задана падающая волна $E_n = e^{-ik_0(\sin\theta_0 x + \cos\theta_0 z)}$, а решение (7) имеет вид $E_0 = F_0(z) e^{-ik(z)\sin\theta(z) x}$ [8]. Тогда для F_0 получим уравнение

$$\frac{d^2 F_0}{dz^2} + k_0^2 (e^{-bz} - \sin^2\theta_0) F_0 = 0. \tag{8}$$

Его решение, ограниченное при $z \to \infty$, имеет вид

$$F_0 = A J_\nu(\gamma),$$

где $J_\nu(\gamma)$ — функция Бесселя порядка ν, $\gamma = a_1 e^{-bz/2}$,

$$\nu = a_1 \sin\theta_0, \quad a_1 = \frac{2k_0}{b}.$$

Для невозмущенного поля:

$$E_0 = AJ_\nu(\gamma)\, e^{-ik_0 \sin\theta_0 x},$$

$$R_0 = \frac{J_\nu(a_1) + \dfrac{i}{\cos\theta_0} J'_\nu(a_1)}{J_\nu(a_1) \dfrac{i}{\cos\theta_0} J'_\nu(a_1)}, \tag{9}$$

где R_0 — коэффициент отражения.

$$A = \frac{2}{J_\nu(a_1) - \dfrac{i}{\cos\theta_0} J'_\nu(a_1)}, \text{ а } J'_\nu(a_1) = \left.\frac{dJ_\nu(\gamma)}{d\gamma}\right|_{\gamma=a_1}.$$

Физический смысл (9) очевиден: падающая волна полностью отражается слоем; за уровнем отражения $z > z_0$ ($e^{-bz_0} = \sin^2\theta_0$) — резкое спадание интенсивности поля; при $z < z_0$ поле имеет осциллирующий характер.

Нахождение $\overline{\mu\xi}$. Рассмотрим уравнение для рассеянного поля (6). Это неоднородное уравнение с заданным распределением источников. Как уже говорилось, будем искать его решение по методу возмущений, подставляя в правую часть (6) вместо среднего поля невозмущенное поле E_0. Для решения уравнения представим случайные функции ξ и μE_0 в виде интегралов Фурье по переменным x и y [9]:

$$\xi^*(\alpha, \beta, z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x+\beta y)} \xi dx dy, \tag{10}$$

$$(\mu E_0)^* = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x+\beta y)} \mu E_0 dx dy. \tag{11}$$

Умножим (6) на $e^{i(\alpha x+\beta y)}$ и проинтегрируем по x, y от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда для ξ^* получим

$$\frac{d^2\xi^*}{dz^2} + [k_0^2 e^{-bz} - (\alpha^2 + \beta^2)]\, \xi^* = -k_0^2 (\mu E_0)^*. \tag{12}$$

Линейно-независимыми решениями уравнения (12) без правой части будут функции $J_{\nu_1}(\gamma)$ и $N_{\nu_1}(\gamma)$, где $\nu_1 = \frac{2}{b}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Общее решение неоднородного уравнения (12) имеет вид

$$\xi^* = A_1 J_{\nu_1}\left(a_1 e^{-\frac{bz}{2}}\right) + B_1 N_{\nu_1}\left(a_1 e^{-\frac{bz}{2}}\right) + J_{\nu_1}\left(a_1 e^{-\frac{bz}{2}}\right) \int\limits_0^z \frac{k_0^2 (\mu E_0)^* N_{\nu_1}\left(a_1 e^{-\frac{b\bar z}{2}}\right)}{W(\bar z)} d\bar z -$$

$$- N_{\nu_1}\left(a_1 e^{-\frac{bz}{2}}\right) \int\limits_0^z \frac{k_0^2 (\mu E_0)^* J_{\nu_1}\left(a_1 e^{-\frac{b\bar z}{2}}\right)}{W(\bar z)} d\bar z, \tag{13}$$

где $W(\bar z)$ — определитель Вронского системы функций $J_{\nu_1}\left(a_1 e^{-\frac{b\bar z}{2}}\right)$ и $N_{\nu_1}\left(a_1 e^{-\frac{\beta\bar z}{2}}\right)$. (Черта сверху означает переменную интегрирования.) Учитывая, что $W(z) = -\frac{b}{\pi}$, и вводя новую переменную интегрирования γ, получим

$$\xi^* = A_1 J_{\nu_1}(\gamma) + B_1 N_{\nu_1}(\gamma) + \frac{2\pi k_0^2}{b^2} J_{\nu_1}(\gamma) \int_{a_1}^{\gamma} N_{\nu_1}(\bar{\gamma})(\mu E_0)^* \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} + $$
$$+ \frac{2\pi k_0^2}{b^2} N_{\nu_1}(\gamma) \int_{a_1}^{\gamma} J_{\nu_1}(\bar{\gamma})(\mu E_0)^* \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}}. \quad (14)$$

Постоянные A_1 и B_1, как и раньше, найдем из граничных условий. Поскольку при $z \to \infty$ $\xi^* \to 0$, то должны положить

$$B_1 = -\frac{2\pi k_0^2}{b^2} \int_0^{a_1} J_{\nu_1}(\bar{\gamma})(\mu E_0)^* \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}}. \quad (15)$$

Постоянная A_1 выбирается таким образом, чтобы на границе слоя решение (14) переходило в расссеянную бегущую волну. Тогда

$$A_1 = \frac{2\pi k_0^2}{b^2} \widetilde{A}_1(\nu_1) \int_0^{a_1} J_{\nu_1}(\bar{\gamma})(\mu E_0)^* \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}}, \quad \widetilde{A}_1 = \frac{N'\nu_1(a_1) - i\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{k_0^2}}\, N_{\nu_1}(a_1)}{J'\nu_1(a_1) + i\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{k_0^2}}\, J_{\nu_1}(a_1)}.$$
$$(\varkappa^2 = \alpha^2 + \beta^2) \quad (16)$$

Умножив (14) на $\frac{1}{4\pi^2} e^{-(\alpha x + \beta y)}$ и проинтегрировав по α, β от $-\infty$ до $+\infty$, получим с учетом (15) и (16) выражение для рассеянного поля:

$$\xi = \frac{k_0^2}{2\pi b^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha x + \beta y)} \Bigg\{ \widetilde{A}_1 J_{\nu_1}(\gamma) \int_0^{a_1} J_{\nu_1}(\bar{\gamma})(\mu E_0)^* \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} + $$
$$+ J_{\nu_1}(\gamma) \int_{a_1}^{\gamma} N_{\nu_1}(\bar{\gamma})(\mu E_0)^* \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} - N_{\nu_1}(\gamma) \int_0^{\gamma} J_{\nu_1}(\bar{\gamma})(\mu E_0)^* \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} \Bigg\} d\alpha d\beta \quad (17)$$

Для нахождения $\overline{\mu\xi}$ умножим (17) на μ и, выполняя статистическое усреднение, получим

$$\overline{\mu\xi} = \frac{k_0^2}{2\pi b^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha x + \beta y)} \Bigg\{ \widetilde{A}_1 J_{\nu_1}(\bar{\gamma}) \int_0^{a_1} J_{\nu_1}(\bar{\gamma}) \left[\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y})} \rho E_0 d\bar{x} d\bar{y} \right] \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} + $$
$$+ J_{\nu_1}(\gamma) \int_{a_1}^{\gamma} N_{\nu_1}(\bar{\gamma}) \left[\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha \bar{x} + \beta y)} \rho E_0 d\bar{x} d\bar{y} \right] \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} - $$
$$- N_{\nu_1}(\gamma) \int^{\gamma} J_{\nu_1}(\bar{\gamma}) \left[\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y})} \rho E_0 d\bar{x} d\bar{y} \right] \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} \Bigg\} d\alpha d\beta, \quad (18)$$

где $\rho = \overline{\mu(x, y, z) \cdot \mu_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$ — функция корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Пусть статистические свойства среды будут однородными по пространству, а неоднородности — цилиндрическими, вытянутыми вдоль оси z (такие неоднородности рассматривались в работе [10]). При этом, если принять гауссову функцию корреляции,

$$\rho = \overline{\mu^2} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2+(\bar{y}-y)^2}{l^2}}, \tag{19}$$

где $\overline{\mu^2}$ — средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости, а l — радиус корреляции или масштаб случайных неоднородностей. Считая, что $\overline{\mu^2}$ не меняется на протяжении всего слоя, можем написать для $\overline{\mu\xi}$

$$\overline{\mu\xi} = \frac{k_0^2\overline{\mu^2}}{2\pi b^2} A \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha x+\beta y)} \left\{ \widetilde{A}_1 J_{\nu_1}(\gamma) \int\limits_0^{a_1} J_{\nu_1}(\bar{\gamma}) J_\nu(\bar{\gamma}) [D_1] \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} + \right.$$

$$\left. + J_{\nu_1}(\gamma) \int\limits_{a_1}^{\gamma} N_{\nu_1}(\bar{\gamma}) J_\nu(\bar{\gamma}) [D_1] \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} - N_{\nu_1}(\gamma) \int\limits_0^{\gamma} J_{\nu_1}(\gamma) J_\nu(\gamma) [D_1] \frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} \right\} d\alpha d\beta, \tag{20}$$

где

$$[D_1] = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})} e^{-ik_0\sin\theta_0\bar{x}} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2+(\bar{y}-y)^2}{l^2}} d\bar{x}d\bar{y}.$$

Выполним в (20) интегрирование по $\bar{x}$, $\bar{y}$, а потом перейдем к полярным координатам $\nu_1 = \frac{2}{b}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ и φ, причем $\alpha = \frac{b}{2}\nu_1\cos\varphi$, $\beta = \frac{b}{2}\nu_1\sin\varphi$. Тогда после интегрирования по φ и проведения несложных преобразований получим

$$\overline{\mu\xi} = \frac{\pi k_0^2 l^2 \overline{\mu^2}}{4} A e^{-ik_0\sin\theta_0 x} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{l^2b^2}{16}(\nu_1^2+\nu^2)} I_0\left(\frac{l^2b^2}{8}\nu\nu_1\right) \times$$

$$\times \nu_1 \left\{ \widetilde{A}_1 J_{\nu_1}(\gamma) \int\limits_0^{a_1} J_{\nu_1}(\gamma) J_\nu(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma} + \frac{2}{\pi} \frac{J_\nu(\gamma)}{\nu_1^2-\nu^2} - \right.$$

$$\left. - J_{\nu_1}(\gamma) \int\limits_0^{a_1} N_{\nu_1}(\gamma) J_\nu(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma} \right\} d\nu_1, \tag{21}$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В дальнейшем удобнее не проводить до конца интегрирование в $\overline{\mu\xi}$, а рассмотреть уравнение для среднего поля, подставляя в правую часть его выражение $\overline{\mu\xi}$ в виде (21).

Вычисление среднего поля. Решение уравнения (4) будем искать в виде $\bar{E}_1 = F_1(z)\, e^{-ik_0\sin\theta_0 x}$.

(Нижний индекс указывает на то, что ищется первое приближение среднего поля.) После подстановки его в (4) уравнение для $\overline{F}_1(z)$ принимает вид

$$\overline{F}_1'' + k_0^2\,(e^{-bz} - \sin^2\theta_0)\,\overline{F}_1 = -\,k_0^2\overline{\mu\xi}\,(z), \tag{22}$$

где $\overline{\mu\xi}\,(z) = \overline{\mu\xi}e^{ik_0\sin\theta_0 x}$.

В качестве линейно-независимых решений уравнения (22) без правой части выберем функции $J_\nu(\gamma)$ и $N_\nu(\gamma)$. Тогда общее решение неоднородного уравнения (22) запишется так:

$$\overline{F}_1 = \overline{A}_1 J_\nu(\gamma) + \overline{B}_1 N_\nu(\gamma) + \frac{2\pi k_0^2}{b^2} J_\nu(\gamma)\int\limits_{a_1}^{\gamma} N_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,(z)\,\frac{d\gamma}{\gamma} -$$

$$-\,\frac{2\pi k_0^2}{b^2} N_\nu(\gamma)\int\limits_{a_1}^{\gamma} J_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,(z)\,\frac{d\gamma}{\gamma}. \tag{23}$$

В силу условия конечности поля при $z\to\infty$ положим

$$\overline{B}_1 = -\,\frac{2\pi k_0^2}{b^2}\int\limits_0^{a_1} J_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,\frac{d\gamma}{\gamma}.$$

Постоянную $\overline{A}_1$ и коэффициент отражения среднего поля $\overline{R}_1$ найдем из граничных условий при $z = 0$. Тогда для среднего поля в среде получаем

$$\overline{F}_1 = F_0 + \frac{2\pi k_0^2}{b^2}\left\{J_\nu(\gamma)\left[B\int\limits_0^{a_1} J_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,\frac{d\gamma}{\gamma} - \int\limits_0^{a_1} N_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,\frac{d\gamma}{\gamma}\right] +\right.$$

$$\left. +\, J_\nu(\gamma)\int\limits_0^{\gamma} N_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,\frac{d\gamma}{\gamma} - N_\nu(\gamma)\int\limits_0^{\gamma} J_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,\frac{d\gamma}{\gamma}\right\}, \tag{24}$$

где

$$B = \frac{N_\nu(a_1) - \dfrac{i}{\cos\theta_0}\,N_\nu'(a_1)}{J_\nu(a_1) + \dfrac{i}{\cos\theta_0}\,J_\nu'(a_1)}.$$

Выражение для коэффициента отражения принимает вид

$$\overline{R}_1 = \frac{J_\nu(a_1) + \dfrac{i}{\cos\theta_0}\,J_\nu'(a_1) - \dfrac{ia_1}{\cos\theta_0}\displaystyle\int\limits_0^{a_1} J_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,\frac{d\gamma}{\gamma}}{J_\nu(a_1) - \dfrac{i}{\cos\theta_0}\,J_\nu'(a_1)}. \tag{25}$$

Выражения (24) и (25) показывают, что среднее поле в среде и коэффициент отражения $\overline{R}_1$ отличаются от невозмущенных E_0 и R_0 наличием интегральных членов, исчезающих вместе с μ. Таким образом, рассеянные волны изменяют амплитуду и фазу среднего поля.

Вычислим вначале $\overline{R}_1$, а потом попытаемся упростить (24).

Учитывая (21) и изменяя порядок интегрирования (законность этой операции не вызывает сомнений), получим

$$\int_0^{a_1} J_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}(z)\frac{d\gamma}{\gamma}=\frac{\pi k_0^2 l^2\overline{\mu}^2}{4}A\int_0^\infty e^{-\frac{l^2b^2}{16}(\nu_1^2+\nu^2)}I_0\left(\frac{l^2b^2}{8}\nu\nu_1\right)\nu_1\times$$

$$\times\left\{\widetilde{A}_1\left[\int_0^{a_1}J_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\right]^2+\frac{2}{\pi}\frac{1}{\nu_1^2-\nu^2}\int_0^{a_1}J_\nu^2(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}-\right.$$

$$\left.-\left[\int_0^{a_1}J_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\right]\left[\int_0^{a_1}N_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\right]\right\}d\nu_1. \qquad (26)$$

В общем случае при произвольных углах падения волны это выражение является окончательным и для его анализа необходимо использовать методы численного интегрирования. Его можно упростить для малых углов падения волны ($\nu \ll a_1$), если рассматривать крупномасштабные неоднородности ($k_0 l \gg 1$) и, следовательно, малый угол рассеяния. В этом случае существенной областью интегрирования по ν_1 в (26) будет конечный отрезок от $\nu-\Delta$ до $\nu+\Delta$, где Δ определяется из условия $\frac{l^2b^2}{16}\Delta^2=1$ и характеризует угол рассеяния волн. И тогда в указанной области интегрирования также $\nu_1 \ll a_1$ $\left(a_1=\frac{2k_0}{b}\gg 1\right)$ и функции $J_{\nu_1}(a_1)$ и $N_{\nu_1}(a_1)$ можно представить их асимптотическими выражениями, т. е.

$$J_{\nu_1}(a_1)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi a_1}}\cos\left(a_1-\frac{\pi}{2}\nu_1-\frac{\pi}{4}\right)$$

и

$$N_{\nu_1}(a_1)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi a_1}}\sin\left(a_1-\frac{\pi}{2}\nu_1-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (27)$$

Сделанные предположения позволяют интеграл (26) заменить следующим:

$$\int_0^{a_1} J_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\frac{d\gamma}{\gamma}=\frac{\pi k_0^2 l^2\overline{\mu}^2}{4}A\int_{\nu-\Delta}^{\nu+\Delta} e^{-\frac{l^2b^2}{16}(\nu_1-\nu)^2}e^{-\frac{l^2b^2}{8}\nu\nu_1}I_0\left(\frac{l^2b^2}{8}\nu\nu_1\right)\nu_1\times$$

$$\times\left\{-i\left[\int_0^{a_1}J_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\right]^2+\frac{2}{\pi}\frac{1}{\nu_1^2-\nu^2}\int_0^{a_1}J_\nu^2(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}-\right.$$

$$\left.-\left[\int_0^{a_1}J_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\right]\left[\int_0^{a_1}N_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\right]\right\}d\nu_1. \qquad (28)$$

Проведем дальнейшее упрощение подынтегрального выражения (28). Поскольку даже при малых углах падения $\nu=a_1\sin\theta_0\gg 1$, то в указанных пределах интегрирования $\frac{l^2b^2}{8}\nu\nu_1\gg 1$, а следовательно, $I_0\left(\frac{l^2b^2}{8}\nu\nu_1\right)\approx$ $\approx\frac{2\exp\frac{l^2b^2}{8}\nu\nu_1}{\sqrt{\pi}\,bl\sqrt{\nu\nu_1}}$. Вычислим в (28) интегралы по γ, а затем представим функции $J_{\nu_1}(a_1)$ и $N_{\nu_1}(a_1)$ согласно (27). Введя далее новую переменную интегрирования $\nu_1-\nu$ и считая приближенно, что $\nu_1+\nu\approx 2\nu$, а $\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu}}\approx 1$, получим с учетом, что $\frac{1}{a_1}=\frac{b\lambda}{4\pi}\ll 1$ и $\frac{1}{\Delta}=\frac{bl}{4}\ll 1$ (это означает, что масштаб регулярных неоднородностей много больше масштаба нерегулярных неоднородностей)

$$\int\limits_0^{a_1} J_\nu(\gamma)\,\overline{\mu\xi}\,\frac{d\gamma}{\gamma}\approx\frac{k_0^2l^2\overline{\mu}^2A}{2\sqrt{\pi}bl\nu^2}\left[\frac{\sin 2\alpha_1}{2\pi a_1}-i\mathrm{Si}\frac{4\pi}{bl}\right], \tag{29}$$

здесь $\alpha_1=a_1-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}$.

Перейдем к вычислению среднего поля $\overline{E}_1$. Из (24) с учетом (21) имеем

$$\overline{E}_1=\overline{F}_1e^{-ik_0\sin\theta_0x}=E_0+\frac{\pi^2k_0^2}{2b^2}k_0^2l^2\overline{\mu}^2Ae^{-ik_0\sin\theta_0x}\cdot\Bigg\{J_\nu(\gamma)\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty f(\nu_1)\Bigg[B\widetilde{A}_1\Bigg(\int\limits_0^{a_1}J_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\Bigg)^2-B\int\limits_0^{a_1}J_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\int\limits_0^{a_1}N_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\times$$

$$\times\frac{d\gamma}{\gamma}+\frac{2}{\pi}\frac{B}{\nu_1^2-\nu^2}\int\limits_0^{a_1}J_\nu(\gamma)N_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}\Bigg]d\nu_1-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\nu_1)\Bigg[\frac{J_{\nu_1}(\gamma)}{\nu_1^2-\nu^2}\times$$

$$\times\Bigg(\widetilde{A}_1\int\limits_0^{a_1}J_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}-\int\limits_0^{a_1}N_{\nu_1}(\gamma)J_\nu(\gamma)\frac{d\gamma}{\gamma}+\frac{1}{\pi\nu}\frac{1}{\nu_1^2-\nu^2}\frac{\partial J_\nu(\gamma)}{\partial\nu}\Bigg]d\nu_1\Bigg\}, \tag{30}$$

где $f(\nu_1)=e^{-\frac{l^2b^2}{16}(\nu_1^2+\nu^2)}I_0\left(\frac{l^2b^2}{8}\nu\nu_1\right)\nu_1$.

Оставаясь в рамках прежних предположений, воспользуемся при интегрировании методом стационарной фазы, учитывая, что при ν, $\nu_1\gg 1$ [11]

$$J_{\nu_1}(\gamma)\approx\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(\nu_1\theta-\gamma\sin\theta)\,d\theta,$$

$$J_\nu(\gamma)\approx\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(\nu\theta-\gamma\sin\theta)\,d\theta.$$

Опуская громоздкие выкладки, сразу приведем окончательный результат

$$\overline{E}_1=E_0+\frac{k_0^2l^2\overline{\mu}^2Ae^{-ik_0^2\sin\theta_0x}}{4\sqrt{\pi}bl\sin^2\theta_0}\left[-\pi\mathrm{Si}\left(\frac{4\pi}{bl}\right)J_\nu(\gamma)+\varphi_1(\beta_1)J_\nu^{ac}(\gamma)+if_1(\beta_1)N_\nu^{ac}(\gamma)\right], \tag{31}$$

здесь $J_\nu^{ac}(\gamma)$ и $N_\nu^{ac}(\gamma)$ — асимптотики функций Бесселя и Неймана при больших индексах, когда $\gamma>\nu$ и $\gamma=\nu$, а

$$\varphi_1(\beta_1)=\pi\mathrm{Si}\left(\frac{4\pi}{bl}\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\beta_1\right)\mathrm{Si}\left[\frac{4}{bl}\left(\frac{\pi}{2}+\beta_1\right)\right]-$$

$$-\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)\mathrm{Si}\left[\frac{4}{bl}\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)\right],$$

$$f_1(\beta_1) = \left(\frac{\pi}{2} + \beta_1\right) \mathrm{Si}\left[\frac{4}{bl}\left(\frac{\pi}{2} + \beta_1\right)\right] -$$
$$- \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) \mathrm{Si}\left[\frac{4}{bl}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\right], \quad \cos\beta_1 = \frac{\nu}{\gamma}.$$

Выражение для $\overline{E}_1$ становится довольно простым в области отражения $(\gamma = \nu)$

$$\overline{E}_1(z_{\text{отр}}) = E_0(z_{\text{отр}}) \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}\, k_0^2 l^2 \overline{\mu^2}}{4bl \sin^2\theta_0} \mathrm{Si}\, \frac{2\pi}{bl}\right]. \tag{32}$$

Остановимся на пределах применимости полученных выражений. Эти пределы ограничены, во-первых, условием применимости уравнений (4), (6), которые справедливы, если $\xi \ll \overline{E}$. Это условие, связанное с возможностью ограничиться учетом однократного рассеяния, как уже отмечалось, обеспечивается абсолютной малостью флуктуаций μ. Во-вторых, область применимости результатов ограничена допустимой в методе возмущений возможностью замены в уравнении (6) среднего поля невозмущенным и связана с выполнением неравенства

$$\overline{E}_2 - \overline{E}_1 \ll \overline{E}_1, \tag{33}$$

где $\overline{E}_2$ — второе приближение среднего поля. Вычисление $\overline{E}_2$ приводит к дополнительным математическим трудностям, связанным с тем, что $\overline{E}_1$ не имеет равномерной асимптотики на протяжении всего слоя. Поэтому при определении условий применимости полученных результатов ограничимся энергетическими соображениями, которые приводят к тому, что выражения для $\overline{E}_1$, $\overline{R}$, справедливы, когда

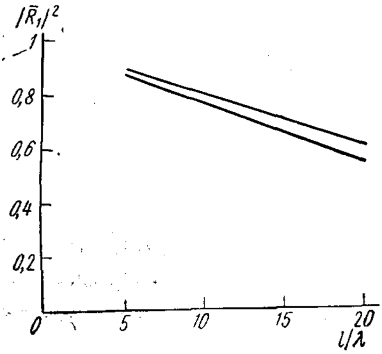
$$k_0^2 l^2 \overline{\mu^2} \ll \frac{4bl \sin^2\theta_0}{\pi^{3/2}}, \tag{34}$$

где нижняя граница угла падения θ_0 определяется углом рассеяния, т. е. $\sin\theta_0 > \frac{2}{k_0 l}$, а верхняя граница—возможностью представления цилиндрических функций на границе слоя их асимптотическими выражениями. К этому следует добавить, что полученные решения применимы при описании распространения волн в слое с крупномасштабными неоднородностями, т. е. при $k_0 l \gg 1$.

Полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы при исследовании наклонного распространения радиоволн в ионосфере, особенность неоднородной структуры которой состоит в том, что ее средние параметры изменяются по высоте, а в области отражения может происходить интенсивное рассеяние волн. В этих условиях среднее поле может заметно отличаться от невозмущенного, поскольку энергия первичной волны уменьшается за счет рассеяния. Влияние этого рассеяния проявляется в своеобразном «затухании» среднего поля. Это видно, например, из рис. 1, на котором представлена зависимость квадрата модуля коэффициента отражения среднего поля $|\overline{R}_1|^2$ (вычисленного с учетом (34)) от отношения l/λ.

Интересно сравнить полученные результаты с результатами других авторов. Здесь прежде всего следует указать на работу Денисова и Ерухимова [12], относящуюся к нормальному распространению волн, в которой получены решения для флуктуаций фазы сигнала в условиях полного отражения от ионосферного слоя, диэлектрическая проницаемость которого изменяется по линейному закону. Воспользовавшись результатами этой работы, можно получить оценку отраженного среднего поля, если фазовые флуктуации s_1 распределены по нормальному закону. В этом случае амплитуда среднего поля на выходе из ионосферного слоя равна $e^{-\frac{\bar{s}_1^2}{2}}$ и для слоя с $\overline{\mu^2} = 2 \cdot 10^{-8}$, $\frac{l}{\lambda} = 10$, $L = 100$ *км* (L отсчитывается от уровня отражения) составляет 0,95. Модуль же коэффициента отражения $|R_1|$ от слоя с теми же параметрами и при $\theta_0 = 10°$ равен, по нашим данным, 0,89.

Естественно сравнить «затухание» среднего поля в слое с регулярным градиентом $\bar{\varepsilon}(z)$ с затуханием среднего поля в слое двойной толщины, средняя диэлектрическая проницаемость которого равна единице. Для этого воспользуемся результатами работы [1], в которой вычислен коэффициент поглощения (по мощности) среднего поля в такой среде. Тогда затухание среднего поля по мощности в двойном слое с параметрами $\overline{\mu^2} = 2 \cdot 10^{-8}$, $\frac{l}{\lambda} = 10$, $2L = 200$ *км* при нормальном падении волны на слой равно 0,995; «затухание» среднего поля в экспоненциальном слое при $\Theta_0 = 10°$ равно 0,78, т. е. больше. Заметим, что это согласуется с выводами работ [10, 12] о том, что основной эффект искажения поля плоской волны определяется хаотическими неоднородностями, расположенными вблизи уровня отражения



Зависимость квадрата модуля коэффициента отражения $|\bar{R}_1|^2$ от отношения l/λ. Для верхней кривой $\overline{\mu^2} = 5 \cdot 10^{-8}$, $b = \frac{1}{10}$ *км*$^{-1}$; $\theta_0 = 10°$, для нижней — $\overline{\mu^2} = 2 \cdot 10^{-8}$, $b = \frac{1}{30}$ *км*$^{-1}$, $\theta_0 = 10°$

В заключение выражаю глубокую благодарность В. Д. Гусеву за постоянный интерес к работе и многочисленные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канер Э. «Изв. вузов», радиофизика, **2**, 827, 1959.
2. Басс Ф. Г. «Изв. вузов», радиофизика, **2**, 1015, 1959.
3. Басс Ф. Г., Брауде С. Я., Канер Э. А., Мень А. В. «Успехи физич. наук», **73**, 89, 1961.
4. Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. «Изв. вузов», радиофизика, **7**, 605, 1964.
5. Андреев И. В. «Изв. вузов», радиофизика, **8**, 1069, 1965.
6. Лифшиц И. М., Каганов М. И., Цукерник В. М. «Уч. зап. ХГУ», тр. физ.-мат. фак-та, **2**, 41, 1950.
7. Борисов В. В., Красильников В. Н. Сб. «Проблемы дифракции и распространения волн», вып. 2. Изд-во ЛГУ, 1962, стр. 102.
8. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.
9. Гинберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1948.
10. Денисов Н. Г. «Изв. вузов», радиофизика, **3**, 208, 1960.
11. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ, 1949.
12. Денисов Н. Г., Ерухимов Л. М. «Геомагнетизм и аэрономия», **6**, 695, 1966.

Поступила в редакцию
10.7 1967 г.

Кафедра
волновых процессов