Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1968

УДК 539.17

В. В. КОМАРОВ, И. Т. ОБУХОВСКИЙ, А. М. ПОПОВА

О ДВУХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Обсуждаются два метода получения системы интегральных уравнений для амплитуд взаимодействия трех нерелятивистских частиц: метод, предложенный Фаддеевым, и метод суммирования диаграмм. Показано, что исследование ядер интегральных уравнений, проведенное Фаддеевым, может быть применено для обоснования метода суммирования бесконечных рядов фейнмановских диаграмм в нерелятивистских задачах взаимодействия нескольких частиц.

В работах Л. Д. Фаддеева [1, 2] было впервые найдено математически корректное решение нерелятивистской задачи трех тел в квантовой механике в предположении, что существенны лишь двухчастичные силы (при разумных предположениях о потенциале взаимодействия). Там была получена система интегральных уравнений для амплитуд и доказано, что такая система может быть решена численно. Точнее, было доказано, что ядра интегральных уравнений вполне непрерывны (компактны), а это эквивалентно возможности получения численного решения [3].

Нужно отметить, что независимо от работ Фаддеева подобные системы интегральных уравнений для трехчастичных и четырехчастичных амплитуд были получены [4—6] методом суммирования бесконечных рядов фейнмановских диаграмм, и эти системы уравнений уже неоднократно применялись для практических расчетов сечений [9] и оценок различных приближений [6]. В рамках диаграммного метода ранее не доказывалась математическая корректность получения интегральных уравнений для амплитуд на основании суммирования бесконечных рядов фейнмановских амплитуд. В настоящей работе показывается, что компактность ядер интегральных уравнений является достаточным условием для обоснования метода суммирования диаграммы в нерелятивистских задачах о рассеянии нескольких частиц.

Как известно, интегральное уравнение дает неформальное решение задачи, если существует какой-нибудь метод его численного решения. Численное решение возможно, если ядро неоднородного интегрального уравнения компактно[1] или если соответствующее однородное

[1] Достаточным условием компактности ядра интегрального уравнения является его квадратичная интегрируемость.

уравнение не имеет непрерывного спектра решений. (Оба требования эквивалентны.)

В случае задачи рассеяния двух частиц уравнение Липмана—Швингера оказывается с компактным ядром.

Но уже в системе трёх частиц ядро

$$\hat{K}(E \pm i\eta) = \hat{V}\frac{1}{\hat{H}_0 - (E \pm i\eta)} \tag{1}$$

уравнения Липмана-Швингера

$$|\psi_E^{(\pm)}\rangle = |\chi_E\rangle - \hat{V}\frac{1}{\hat{H}_0 - (E \pm i\eta)}|\psi_E^{\pm}\rangle \tag{2}$$

некомпактно при любом потенциале парного взаимодействия частиц.

Действительно, если за координаты выбраны относительные импульсы частиц

$$\bar{k}_{ij} = \frac{m_j\bar{k}_i - m_i\bar{k}_j}{m_i + m_j};\ m_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \tag{3}$$

$$\bar{p}_{ij} = \frac{m_k(\bar{k}_i + \bar{k}_j) - (m_i + m_j)\bar{k}_k}{m_1 + m_2 + m_3};\quad n_{ij} = \frac{(m_i + m_j)m_k}{m_1 + m_2 + m_3}, \tag{4}$$

$$i \neq j \neq k = 1,\ 2,\ 3$$

то оператор Гамильтона $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ определится в виде

$$\hat{H}\psi(\bar{k},\ \bar{p}) = \left(\frac{1}{2m}k^2 + \frac{1}{2n}p^2\right)\psi(\bar{k},\ \bar{p}) +$$

$$+ \sum_{a = 12,\ 23,\ 31}\int v_\alpha(\bar{k}_\alpha - \bar{k}'_\alpha)\,\delta(\bar{p}_\alpha - \bar{p}'_\alpha)\,\psi(\bar{k}'_\alpha,\ \bar{p}'_\alpha)\,d\bar{k}'_\alpha d\bar{p}'_\alpha. \tag{5}$$

Отсюда ядро (1) уравнения (2) определяющееся в импульсном пространстве в виде

$$K(\bar{k},\ \bar{p};\ \bar{k}',\ \bar{p}';\ E \pm i\eta) = \sum_{\alpha=12,\,23,\,31}\frac{v_\alpha(\bar{k}_\alpha - \bar{k}'_\alpha)\,\delta(\bar{p}_\alpha - \bar{p}'_\alpha)}{\frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha} - (E \pm i\eta)}, \tag{6}$$

содержит δ-функции, которые при возведении в квадрат дадут неинтегрируемые сингулярности. Таким образом, уже в случае числа частиц $N \geqslant 3$ уравнение (2) является лишь формальным решением задачи рассеяния. Поэтому необходимо вместо уравнения (2) найти такое уравнение для амплитуды, которое можно было бы решать численно. Оказывается, что вообще не существует такого единого интегрального уравнения с компактным ядром, которое могло бы служить для определения амплитуды при $N \geqslant 3$.

Важным результатом исследования Фаддеева [2] является доказательство того, что в случае задачи трех тел вместо одного Гильбертова пространства состояний $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых функций относительных импульсов частиц $\psi(\bar{k},\ \bar{p})$ следует использовать прямую сумму неортогональных пространств

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_d + \mathcal{H}_{12} + \mathcal{H}_{31} + \mathcal{H}_{32} + \mathcal{H}_0. \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{H}_d$ — пространство волновых функций трехчастичных связанных состояний; $\mathcal{H}_0$ — пространство волновых функций $\psi(\bar{k},\ \bar{p})$, описывающих свободное движение всех трех частиц; $\mathscr{H}_{ij}$ — пространства волновых функций $\psi_\varkappa(\bar{k}_{ij}) f(\bar{p}_k)$, описывающих свободное движение частицы k и связанное состояние пары частиц i и j с энергией связи $\varkappa^2$, причем $\Psi_\varkappa(\bar{k}_{ij})$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{k_{ij}^2}{2m_{ij}}\Psi_\varkappa(\bar{k}_{ij}) + \int v_{ij}(\bar{k}_{ij} - \bar{k}'_{ij})\Psi_\varkappa(\bar{k}'_{ij})\,d\bar{k}'_{ij} = -\varkappa^2\Psi_\varkappa(\bar{k}_{ij}). \qquad (8)$$

Пространства $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{H}_{ij}$, очевидно, являются пространствами асимптотических движений в различных каналах реакции взаимодействия трех частиц.

В каждом из пространств $\mathscr{H}_\alpha$ ($\alpha = 12, 13, 23$) в рамках формальной теории рассеяния можно определить оператор

$$\widehat{M}_{\beta\alpha}(z) = \widehat{V}_\beta - \widehat{V}_\beta\frac{1}{\widehat{H} - z\widehat{I}}\widehat{V}_\alpha \qquad (9)$$

с областью значений в $\mathscr{H}_\beta$, дающий амплитуду перехода из канала α в канал β. Очевидно, амплитуда перехода в канал $\circ$ должна быть определена равенством

$$\widehat{T}_{\circ\alpha}(z) = \sum_{\beta=12,23,31}\widehat{M}_{\beta\alpha}(z). \qquad (10)$$

Полная амплитуда $T(z)$ должна быть суммой амплитуд (9) по всем каналам α и β:

$$\widehat{T}(z) = \sum_{\alpha,\beta=12,23,31}\widehat{M}_{\beta\alpha}(z). \qquad (11)$$

Если подставить (9) в (11), то, как и следовало ожидать, получим операторное определение амплитуды $\widehat{T}(z)$ в комплексной плоскости энергии: $\widehat{T}(z) = \widehat{V} + \widehat{V}\widehat{R}(z)\widehat{V}$, где $\widehat{R}(z)$ — резольвента оператора $\widehat{H}$: $\widehat{R}(z) = \frac{1}{\widehat{H} - z\widehat{I}}$; $\widehat{I}$ — единичный оператор в пространстве состояний системы.

Из определения (9) следует система уравнений для операторов $\widehat{M}_{\alpha\beta}(z)$

$$\widehat{M}_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}\widehat{V}_\alpha - \widehat{V}_\alpha\widehat{R}_0(z)\sum_{\gamma=12,23,31}\widehat{M}_{\gamma\beta}(z), \qquad (12)$$

где $\widehat{R}_0(z) = (\widehat{H}_0 - z\widehat{I})^{-1}$.

Система интегральных уравнений, соответствующая системе (12) для операторов, все еще содержит некомпактные ядра. Но ее легко можно преобразовать так, чтобы она содержала компактные ядра. При этом преобразовании из уравнений (12) исключаются потенциалы и вместо них появляются амплитуды двухчастичного рассеяния $t(\bar{k}, \bar{k}'; z)$, для определения которых может служить уравнение

$$t(\bar{k}, \bar{k}'; z) = v(\bar{k} - \bar{k}') - \int\frac{v(\bar{k} - \bar{k}'')}{\frac{k''^2}{2m} - z}\,t(\bar{k}'', \bar{k}'; z)\,d\bar{k}''. \qquad (13)$$

Фаддеев показал, что с помощью $t(\bar{k}, \bar{k}'; z)$ может быть определена в пространстве $\mathscr{H}_\alpha$ амплитуда $\widehat{T}_\alpha(z)$, дающая переходы только внутри канала α, т. е. амплитуда двухчастичного рассеяния в трехчастичной задаче:

$$\hat{T}_\alpha(z)\,\psi(\bar{k}_\alpha, \bar{p}_\alpha) = \int t_\alpha\left(\bar{k}_\alpha, \bar{k}'_\alpha;\ \ z - \frac{p'^2_\alpha}{2n_\alpha}\right)\delta(\bar{p}_\alpha - p'_\alpha)\,\psi(\bar{k}'_\alpha, p'_\alpha)\ \times$$
$$\times\ d\bar{k}'_\alpha\, d\bar{p}'_\alpha. \tag{14}$$

В операторном представлении амплитуда $\hat{T}_\alpha(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{T}_\alpha(z) = \hat{V}_\alpha[\hat{I} - \hat{R}_0\ (z)\,\hat{T}_\alpha(z)] = [\hat{I} - \hat{T}_\alpha(z)\,\hat{R}_0(z)]\,\hat{V}_\alpha. \tag{15}$$

Если далее обе стороны уравнения (12) умножить слева на $[\hat{I} - \hat{T}_\alpha(z)\,\hat{R}_0(z)]$, то в соответствии с (15) в (12) все потенциалы становятся амплитудами $\hat{T}_\alpha(z)$. Затем после приведения подобных членов вместо (12) может быть получена следующая система уравнений:

$$\hat{M}_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}\hat{T}_\alpha(z) - \hat{T}_\alpha(z)\,\hat{R}_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}\hat{M}_{\gamma\alpha}(z). \tag{16}$$

Свободный член $\hat{T}_\alpha(z)\cdot\delta_{\alpha\beta}$ в уравнении (16) описывает только двухчастичное рассеяние и поэтому не интересен в задаче трех тел. Интересны амплитуды $\hat{W}_{\alpha\beta}(z)$, которые получаются при вычитании из $\hat{M}_{\alpha\beta}(z)$ члена $\delta_{\alpha\beta}\hat{T}_\alpha(z)$:

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(z) = \hat{M}_{\alpha\beta}(z) - \delta_{\alpha\beta}\hat{T}_\alpha(z). \tag{17}$$

Из (17) легко получить систему уравнений для $\hat{W}_{\alpha\beta}(z)$ при $\alpha\neq\beta$

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(z) = \hat{T}_\alpha(z)\,\hat{R}_0(z)\,\hat{T}_\beta(z) - \hat{T}_\alpha(z)\,\hat{R}_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}\hat{W}_{\gamma\beta}(z), \tag{18}$$

при $\alpha = \beta$

$$\hat{W}_{\alpha\alpha}(z) = -\hat{T}_\alpha(z)\,\hat{R}_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}\hat{W}_{\gamma\alpha}(z). \tag{19}$$

Фаддеевым было показано [2], что ядра интегральных уравнений (18) и (19) компактны. В соответствии с тем, что говорилось выше, можно считать, что уравнения (18) и (19) дают решение задачи трех тел в квантовой механике.

Такие же интегральные уравнения (18), (19) были получены в работах [4, 5] в рамках метода суммирования диаграмм.

В этом методе амплитуда перехода определяется матричным элементом

$$\langle\psi_m|\,\hat{S}\,|\psi_n\rangle, \tag{20}$$

где ψ_n — функция начального состояния системы при $t_0 = -\infty$,
ψ_m — функция конечного состояния системы при $t = \infty$,
$\hat{S}$ — матрица рассеяния. Как известно, $\hat{S}$-матрица определяется как предел $\hat{U}(t, t_0)$-матрицы (с обычными правилами перехода к пределу):

$$\hat{S} = \lim_{t\to\infty,\, t_0\to-\infty}\hat{U}\ (t, t_0).$$

Для $\hat{U}(t, t_0)$-матрицы уравнение и граничное условие имеют вид (9)

$$\frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} = \hat{V}(t)\,\hat{U}(t, t_0);\quad \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}, \tag{21}$$

где $\hat{V}(t)$ — оператор взаимодействия, $\hat{I}$ — единичная матрица.

Если $\hat{V}(t)$ ограничен, то решением уравнения (28) может служить ряд Неймана — Лиувилля:

$$\widehat{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n \widehat{p}\{\widehat{V}(t_1)\widehat{V}(t_2)\ldots\widehat{V}(t_n)\}, \quad (22)$$

где p — оператор упорядочения по времени.

Если p-произведение в интеграле (22) разложить по теореме Вика, затем в этой бесконечной сумме сделать предельный переход ($t \to \infty$ и $t_0 \to -\infty$) и подставить ее в (20), то получим бесконечный ряд матричных элементов рассматриваемой реакции, которые можно изображать фейнмановскими графиками.

Графические образы помогают суммировать бесконечный ряд матричных элементов амплитуды рассеяния в линейное интегральное уравнение. В случае задачи двух тел ряд фейнмановских графиков суммируется в одно уравнение с компактным ядром, в точности совпадающим с уравнением типа Липмана—Швингера.

В задаче трех тел бесконечная сумма диаграмм, отвечающих амплитуде трех взаимодействующих различных частиц распадается на девять подсумм, в которых фейнмановские графики отвечают переходу из определенного канала в начальном состоянии в некоторый определенный канал конечного состояния. Суммирование указанных подсумм диаграмм приводит к интегральным уравнениям, аналогичным (17) и (18), с квадратично интегрируемыми ядрами. Таким образом, в рамках метода суммирования диаграмм имеется логическая необходимость представления амплитуды процесса в виде суммы подамплитуд, для определения которых на основании суммирования фейнмановских диаграмм получаются линейные интегральные уравнения с компактными ядрами. В методе Фаддеева представление амплитуды в виде суммы подамплитуд, для которых строятся интегральные уравнения, лишь предполагается, а затем доказывается справедливость этого предположения. Оба метода приводят к эквивалентным результатам, однако при исследовании ядерных реакций удобнее использовать метод суммирования диаграмм, поскольку его амплитуды, изображающиеся графиками, непосредственно связаны с физикой процесса. Оставался открытым вопрос о том, является ли указанное суммирование бесконечных рядов фейнмановских амплитуд корректным методом получения уравнений для амплитуд переходов, поскольку эти ряды могут быть расходящимися.

Если на основании суммирования расходящихся рядов для производящей функции может быть получено интегральное уравнение с компактным ядром, то решение этого уравнения будет являться аналитическим продолжением производящей функции в область значений переменной, где ее ряд расходится. Для доказательства этого утверждения воспользуемся методом Вейнберга [7]. Исследование будем проводить на примере амплитуды двухчастичного рассеяния $\widehat{t}(z)$. Будем рассматривать ее как функцию параметра λ, изменяющего силу взаимодействия $\widehat{t}_\lambda(z)$. Для этой амплитуды справедливо уравнение

$$\widehat{t}_\lambda(z) = \lambda\widehat{v} - \lambda\widehat{v}\frac{1}{\widehat{h}_0 - z\widehat{I}}\widehat{t}_\lambda(z) \quad (23)$$

(при $\lambda = 1$, $\widehat{t}_\lambda(z)$ переходит в $\widehat{t}(z)$).

Формально решение уравнения (30) может быть записано в виде разложения в ряд Тейлора по λ в окрестности точки $\lambda = 0$.

$$\widehat{t}_\lambda(z) = \lambda\widehat{v} - \lambda^2\widehat{v}\frac{1}{\widehat{h}_0 - z\widehat{I}}\widehat{v} + \ldots \quad (24)$$

Как указывалось выше, если существует связанное состояние при энергии $z=-\varkappa^2$, то амплитуда $\hat{t}(z)$ имеет полюс в этой точке. Тогда, поскольку ни один из членов ряда (24) не имеет особенности в указанной точке, сумма ряда (24) расходится при $\lambda=1$ (радиус сходимости заведомо меньше 1). Однако известно, что ряд Тейлора равен своей производящей функции в круге, не содержащем особенности этой функции. В данном случае можно показать, что все же существует такое λ_0 $(0<|\lambda_0|<1)$, когда для всех $|\lambda|<|\lambda_0|$ справедливо разложение (24).

В самом деле, по условию, ядро $\frac{\lambda\hat{v}}{\hat{h}_0-z\hat{I}}$ уравнения (30) компактно и у него, следовательно, существует самое большое, — дискретный спектр собственных векторов. Поэтому в интервале $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ содержится только конечное число точек спектра и всегда можно выбрать такое λ_0, что в интервале $0\leqslant|\lambda|\leqslant|\lambda_0|$ не будет ни одной особой точки функции $\hat{t}_\lambda(z)$. В этом интервале справедливо разложение (24). Вне круга $0<|\lambda|<$ $<|\lambda_0|$ амплитуда $\hat{t}_\lambda(z)$ может быть получена аналитическим продолжением. В частности, такое аналитическое продолжение может давать решение интегрального уравнения, в которое просуммируется ряд (24), т. е. уравнение (23) и его предел при $\lambda\to 1$.

Таким образом, для определения амплитуд мы можем пользоваться даже расходящимися рядами, если их формальное суммирование приводит к интегральному уравнению с компактным ядром, и в качестве суммы ряда берется решение этого уравнения. Поскольку бесконечный ряд матричных элементов амплитуды рассеяния расходится, если существует связанное состояние в системе взаимодействующих частиц, то нельзя в качестве приближенного значения амплитуды рассеяния брать отдельные матричные элементы этого ряда без специального исследования их взноса в точную амплитуду.

Примером такого исследования может служить работа [8], где была подсчитана сумма вкладов от некоторых первых графиков, отвечающих матричным элементам амплитуды рассеяния трех частиц, а для вкладов от остальных диаграмм была записана система уравнений с компактными ядрами. Было показано, что при некоторых значениях передаваемого импульса и энергии можно получить оценку решения указанной системы уравнений и тем самым определить точность первых приближений теории возмущений в задаче трех тел.

Следует отметить также, что, если из взаимодействия выделить часть, ответственную за образование связанного состояния, то остаток взаимодействия можно учитывать по теории возмущений [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, **39**, 1459, 1960.
2. Фаддеев Л. Д. Труды МИАН, **79**, 1963.
3. Lavelace L. Phys. Rev., **135**, B 1225 1964.
4. Комаров В. В., Попова А. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 1964.
5. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ, **45**, 214, 1963.
6. Комаров В. В., Попова А. М. «Ядерная физика», **3**, вып. I, 34, 1966.
7. Weinberg S. Phys. Rev. **133**, B 232, 1964.
8. Popova A. M. Nucl. Phys., **82**, 209, 1966.
9. Комаров В. В., Штафан М., Попова А. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 1, 50, 1966.

Поступила в редакцию
8.7 1967 г.

НИИЯФ