$$Q_s = \frac{\omega_{if}^2 - \omega^2 \cos^2\theta}{s\omega_c}\left[\beta_\perp^2 J_s'^2(z) + \left(\frac{s\omega_c}{\omega}\operatorname{ctg}\theta - \beta_z \sin\theta\right)^2 J_s^2(z)\right].$$

Полученное выражение совпадает, как и следовало ожидать, с результатами квантово-механического рассмотрения.

Авторы благодарят проф. А. А. Соколова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schneider I. Phys. Rev. Lett., **2**, 504, 1959.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **166**, 133, 1966. См. также Синхротронное излучение, сб. статей под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова, «Наука», 1966.
3. Гапонов А. В., Гольденберг А. А., Григорьев Д. П., Орлова И. М., Панкратова Т. Г., Петелин М. И. Письма ЖЭТФ, **2**, 430, 1965.
4. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электродинамика плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
5. Шафранов В. Д. «Вопросы теории плазмы», т. 3. М., Госатомиздат, 1963.

Поступила в редакцию
25.7 1967 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 517.9 : 535.4

В. В. КРАВЦОВ

ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ НА ПРОЗРАЧНОМ НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ

Основным методом решения задачи дифракции на постороннем включении является метод интегральных уравнений. Краевая задача (внешняя) сводится к интегральному уравнению первого или второго рода для наведенного на поверхности постороннего включения тока. Полученное интегральное уравнение решается в большинстве случаев численно, а поле вне препятствия вычисляется при помощи квадратур. В настоящей работе предлагается метод решения задачи дифракции на теле, характеристики которого являются функциями координат. Метод состоит в сведении краевой задачи с условиями сопряжения на поверхности к интегральному уравнению первого рода.

Рассмотрим простейший случай. Пусть волна, создаваемая точечным источником, падает на некоторую область D, характеристики которой являются функциями точки. Внешнее пространство, т. е. D_e, будем считать однородным и изотропным. Обозначим поле в области D_e через $v(M)$, поле в области D — через $u(M)$. Для определения этих полей рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered}
\Delta v + k^2 v = -4\pi\delta(M, M_0) \quad \text{в} \quad D_e, \\
Lu = \operatorname{grad}(K(M)\operatorname{div} u) + q(M) u = 0 \quad \text{в} \quad D, \\
u|_S = v|_S, \\
p_1(M)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = p_2(M)\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S, \\
\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty,
\end{gathered} \tag{1}$$

где M_0 — точка расположения источника, функции $K(M)$, $q(M)$, $p_1(M)$ и $p_2(M)$ связаны с характеристиками среды в области D. Будем предполагать, что поставленная задача имеет и при этом единственное решение.

Сведем поставленную краевую задачу к интегральному уравнению первого рода. Применим формулу Грина к функциям $v(P)$ и $\psi(M,P)=1/R_{MP}\exp\{ikR_{MP}\}$ в области D_e, считая, что $M\in D$ (R_{MP} — расстояние между точками M и P) равно

$$\oint\limits_S \left\{\frac{\partial v}{\partial n}(P)\,\psi(M,P)-v(P)\,\frac{\partial\psi}{\partial n}(M,P)\right\}ds_p=-4\pi\psi(M,M_0),\quad (M\notin D) \tag{2}$$

Пусть $G_2(M,P)$ есть функция Грина для второй краевой задачи для уравнения $Lu=0$ в области D. Тогда

$$u(Q)=\oint\limits_S G_2(Q,N)\,\frac{\partial u}{\partial n}(N)\,dS_N, \tag{3}$$

где $Q\in D+S$. Поместим точку Q на поверхность S. Тогда в силу граничных условий

$$\begin{aligned} u(Q)\,|_S &= v(Q)\,|_S,\\ \frac{\partial u}{\partial n}(Q)\Big|_S &= \frac{p_2(Q)}{p_1(Q)}\,\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S. \end{aligned} \tag{4}$$

(считаем, что $p_1(Q)\,|_S\neq 0$). Следовательно, из (4) и (3) получаем

$$v(P)=\oint\limits_S G_2(P,N)\,\frac{p_2(N)}{p_1(N)}\,\frac{\partial v}{\partial n}(N)\,dS_N.\quad (P\in S) \tag{5}$$

Теперь подставим (5) в (2)

$$\oint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n}(P)\,\psi(M,P)\,dS_p\,-$$

$$-\oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_p}\psi(M,P)\,dS_p\oint\limits_S G_2(P,N)\,\frac{p_2(N)}{p_1(N)}\,\frac{\partial v}{\partial n}(N)\,dS_N=-4\pi\psi(M,M_0),\quad (M\in D). \tag{6}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_p}\psi(M,P)\,dS_p\oint\limits_S G_2(P,N)\frac{p_2(N)}{p_1(N)}\,\frac{\partial v}{\partial n}(N)\,dS_N=$$

$$=\oint\limits_S \frac{p_2(N)}{p_1(N)}\,\frac{\partial v}{\partial n}(N)\,dS_N\oint\limits_S G_2(P,N)\,\frac{\partial}{\partial n_p}\psi(M,P)\,dS_p=$$

$$=\oint\limits_S \frac{p_2(N)}{p_1(N)}\,W(M,N)\,\frac{\partial v}{\partial n}(N)\,dS_N, \tag{7}$$

где функция $W(M,N)$ по аргументу N удовлетворяет в области D следующей краевой задаче:

$$L_N W=0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial n_N}\Big|_S=\frac{\partial}{\partial n_N}\psi(M,N)\,|_S.$$

Следовательно, из (6), используя (7), получаем интегральное уравнение для $\dfrac{\partial v}{\partial n}\Big|_S$

$$\oint_S \left\{\psi(M,\ P) - \frac{p_2(P)}{p_1(P)}\ W(M,\ P)\right\} \frac{\partial v}{\partial n}(P)\, dS_p = -4\pi\psi(M,\ M_0), \qquad (8)$$

где M — произвольная точка из области D.

Полученное интегральное уравнение первого рода имеет решение, если существует решение исходной краевой задачи (1). Единственность решения уравнения (8) доказывается аналогично [1]. Решив уравнение (8), найдем $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S$. После этого, решая внутреннюю задачу:

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \frac{p_2(Q)}{p_1(Q)} \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S,$$

найдем $u|_S = v|_S$. Поле в области D_e вычисляется квадратурами по третьей формуле Грина [2].

При выводе интегрального уравнения (8) предполагалось, что в области D разрешима внутренняя задача Неймана для уравнения $Lu=0$. Если вторая краевая задача неразрешима в области D, то разрешима задача Дирихле и, следовательно, существует функция Грина $G_1(M,\ P)$ для первой краевой задачи. Тогда, проводя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, получаем интегральное уравнение для $v(P)|_S$:

$$\oint_S \left\{\frac{\partial W_1}{\partial n}(M,\ P) - \frac{\partial \psi}{\partial n}(M,\ P)\right\} v(P)\, dS_p = -4\pi\psi(M,\ M_0), \quad (M \in D), \qquad (9)$$

где $W_1(M,\ P)$ есть решение следующей задачи Дирихле:

$$L W_1 = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$W(M,\ P)|_{P\in S} = \frac{p_2(P)}{p_1(P)}\, \psi(M,\ P)|_{P\in S}.$$

Определив $v|_S$ из уравнения (9), находим $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = \frac{p_1}{p_2} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$, решая внутреннюю задачу

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$u|_S = v|_S,$$

после чего поле в D_e вычисляется по формуле Грина.

Таким образом, для решения задачи дифракции на прозрачном неоднородном теле приходится решать внутреннюю задачу (что можно сделать для произвольной области, например, методом конечных разностей) и интегральное уравнение первого рода. Интегральное уравнение можно решать методом регуляризации А. Н. Тихонова.

В статье приведен наиболее естественный вывод уравнения (8) и (9). Но эти уравнения можно получить и другим путем, используя уравнения для W и W_1.

Заметим, что изложенный метод применим к широкому классу задач математической физики (задачи потенциального рассеяния, распространение электромагнитных волн и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов В. В. Вычислительные методы и программирование. Сб. ВЦ МГУ. Изд-во МГУ, 1966, стр. 260—292.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
27.7 1967 г.

Кафедра
математики