Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1968

УДК 539.127

Д. В. ГАЛЬЦОВ

О ВОЗМОЖНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧЕРЕНКОВСКОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

Найдены условия, при выполнении которых наблюдается отрицательное черенковское поглощение в резонансе и вблизи резонанса. Показано, что в однородном магнитном поле, параллельном скорости, черенковский конус расщепляется на три конуса, на одном из которых всегда имеет место усиление.

Известно, что мощность спонтанного черенковского излучения, испускаемого электроном, движущимся в среде без пространственной дисперсии с точностью до $\hbar$, равна [1]

$$W_{cn} = \frac{e^2\beta}{c} \int\limits_{n\beta>1} \omega\,(1 - \cos^2\theta_{\text{изл}})\,d\omega,$$

где $\theta_{\text{изл}}$ — угол между начальным импульсом электрона и импульсом излучаемого фотона, причем

$$\cos\theta_{\text{изл}} = \frac{1}{\beta n} + \frac{n\omega\hbar}{2pc}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Здесь n — показатель преломления, зависящий от ω, p — начальный импульс электрона.

Если $N(\omega)$ — число фотонов с частотой ω, поляризацией в плоскости движения электрона и фотона (угловое распределение предполагается изотропным), то мощность суммарного эффекта индуцированного излучения и поглощения может быть, очевидно, записана так:

$$P_{\text{изл}} = -\frac{e^2\beta}{c} \int\limits_{n\beta>1} \omega N(\omega)\,(\cos^2\theta_{\text{изл}} - \cos^2\theta_{\text{погл}})\,d\omega.$$

Из закона сохранения энергии-импульса следует, что $\theta_{\text{погл}} \neq \theta_{\text{изл}}$, а именно:

$$\cos\theta_{\text{погл}} = \frac{1}{\beta n} - \frac{n\omega\hbar}{2pc}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

поэтому

$$P_{\text{изл}} = \frac{2e^2}{c^2 p} \int\limits_{n\beta>1} \hbar N(\omega)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\omega^2\,d\omega, \qquad (1)$$

т. е. суммарным эффектом является поглощение [2].

Индуцированное черенковское поглощение весьма детально изучалось в последнее время в связи с проблемой ускорения частиц в плазме (обширный список литературы приведен в [2]). В данной работе мы хотим рассмотреть задачу в противоположном аспекте, т. е. выяснить условия, при которых суммарным эффектом является излучение, иначе говоря, возможно усиление волн. Такое рассмотрение представляется оправданным ввиду возможности создания мазеров, рабочей средой которых являются электроны. Покажем, что при определенных условиях в рассматриваемой системе действительно возникает мазерный эффект.

Для простоты будем далее рассматривать изотропную среду без пространственной дисперсии и будем считать, что наличие электронного пучка не меняет свойств среды. Взаимодействие электронных и ионных пучков с плазмой, как известно [5], при определенных условиях приводит к возникновению плазменных колебаний, т. е. дает сходный эффект.

Индуцированное излучение в резонансном приближении

Заметим, что формула (1) является по существу классической. Действительно, величина $\hbar N(\omega)$ может быть записана через спектральную плотность потока энергии (среднее значение вектора Пойнтинга)

$$I_\rho(\omega) = \frac{\omega^3 n^2 N_\rho(\omega)\hbar}{c^2(2\pi)^3}. \tag{2}$$

Индекс ρ характеризует состояние поляризации. Ввиду этого будем далее использовать чисто классическую методику. Отметим сначала существенное различие в постановке квантовой и классической задач. Дело в том, что стационарные состояния, вероятности переходов между которыми вычисляют в квантовомеханической трактовке, в пределе $\hbar \to 0$ отнюдь не переходят в движение по определенной траектории. В случае свободного движения, когда сохраняются три компонента импульса, плотность вероятности в классическом пределе соответствует ансамблю классических частиц с дельтообразной функцией распределения по импульсам и случайными начальными координатами. Баланс энергии при взаимодействии монохроматической волны с таким ансамблем эквивалентен при выборе соответствующей нормировки энергетическому балансу взаимодействия одной частицы с флуктуирующим (т. е. имеющим совершенно случайные фазы) полем. Будем для определенности рассматривать второй случай, однако полученные формулы можно интерпретировать в обоих смыслах.

Итак, пусть частица движется равномерно и прямолинейно в среде со скоростью $v^{(0)} = c\beta$ такой, что $n(\omega)\beta > 1$ в некотором интервале частот. В момент $t=0$ включается взаимодействие с флуктуирующим поперечным электромагнитным полем, электрический вектор которого представим в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \rho} \vec{a}_{\rho\vec{k}} E_{\rho\vec{k}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к. с.}, \tag{3}$$

где

$$\omega = \frac{ck}{n(\omega)}, \quad \rho = \pi, \sigma.$$

В качестве ортов, характеризующих поляризацию, выберем

$$\vec{a}_\pi = \{\cos\theta\cos\varphi, \quad \cos\theta\sin\varphi, \quad -\sin\theta\},$$

$$\vec{a}_\sigma = \{-\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad 0\},$$

θ и φ — сферические углы вектора $\vec{k}$.

Считая поле волны малой величиной и представляя скорость $\vec{v}(t)$ движения электрона в поле (3) в виде

$$\vec{v}(t) = \vec{v}^{(0)} + \vec{v}^{(1)}(t) + \ldots,$$

получим для $\vec{v}^{(1)}(t)$ следующее уравнение:

$$\frac{d\vec{v}^{(1)}}{dt} = \sum_{\vec{k}\rho} \vec{F}_{\vec{k}\rho}(t),$$

$$\vec{F}_{\vec{k}\rho}(t) = \frac{ec^2 E_{\vec{k}\rho}}{\mathscr{E}_0 \omega} \left\{ \vec{a}_{\rho\vec{k}} (\omega - \vec{k}\vec{v}^{(0)}) + \right.$$

$$\left. + \left(\vec{k} - \omega \frac{v^{(0)}}{c^2}\right) (\vec{v}^{(0)} \vec{a}_{\rho\vec{k}}) \right\} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}^{(0)})} + \text{к. с.} \tag{4}$$

где $\mathscr{E}_0$ — энергия при $t \leqslant 0$.

Мгновенная мощность индуцированного излучения, равная работе сил поля со знаком минус, может быть представлена в виде

$$P_{\text{изл}}(t) = e \langle \vec{v}^{(1)} \vec{E}(\vec{r}_0(t), t) + (\vec{r}^{(1)}(t)\vec{\nabla}) (\vec{v}^{(0)} \vec{E}(\vec{r}^{(0)}(t), t)\rangle. \tag{5}$$

Здесь подстановка $\vec{r} = \vec{r}^{(0)}(t)$ в $\vec{E}(\vec{r}, t)$ должна производиться после дифференцирования, а скобки означают операцию усреднения по фазам поля, которая в соответствии со сказанным выше выглядит так:

$$\langle E_{\rho\vec{k}} E_{\rho'\vec{k}'} \rangle = 0,$$

$$\langle E_{\rho\vec{k}} E^*_{\rho'\vec{k}'} \rangle = \delta_{\rho\rho'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \frac{(2\pi)^4 c^2 I_\rho(\omega, \theta, \varphi)}{V n^3 \omega^2 d(\omega n)/d\omega},$$

где V — нормировочный объем. Величина $I_\rho(\omega, \theta, \varphi)$ определена так, что $I_\rho(\omega, \theta, \varphi)\, dO\, d\omega$ есть энергия поля, падающая из телесного угла dO в направлении θ, φ, в интервале частот $d\omega$ с поляризацией ρ на 1 *см*²/*сек*.

Выполняя усреднение и переходя от суммирования к интегрированию, получим для мгновенной мощности индуцированного излучения σ-компонента (ось z по $\vec{v}^{(0)}$):

$$P_\sigma(t) = \frac{4\pi e^2 c}{\mathscr{E}_0} \int \frac{I_0(\theta\varphi\omega)}{\omega n(\omega)} \sin(\omega - \vec{k}\vec{v}^{(0)})\, t\, d\omega\, dO. \tag{6}$$

и π-компонента:

$$P_\pi(t) = -\frac{4\pi e^2 c}{\mathscr{E}_0} \int \frac{I_\pi(\theta\varphi\omega)}{n(\omega)} \left\{ (1 - n\beta\cos\theta - \beta^2 \sin^2\theta) \times \right.$$

$$\times \frac{\sin(\omega - \bar{k}\bar{v}^{(0)})}{\omega - \bar{k}\bar{v}^{(0)}} - n^2\beta^2 \sin^2\theta\, (\omega - \vec{k}\vec{v}^{(0)}) \times$$

$$\left. \times \left[\frac{t\cos(\omega - \bar{k}\bar{v}^{(0)})\, t}{\omega - \vec{k}\vec{v}^{(0)}} - \frac{\sin(\omega - \vec{k}\vec{v}^{(0)}\, t}{(\omega - \vec{k}\vec{v}^{(0)})^2} \right] \right\} dO\, d\omega. \tag{7}$$

Среднее по времени

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt \tag{8}$$

от $P_\sigma(t)$ обращается в нуль, а

$$P_\pi = \frac{4\pi^2 e^2 c}{\mathscr{E}_0}\int \frac{I_\pi(\omega\theta\varphi)}{n(\omega)}\Big\{\beta^2\sin^2\theta\delta[\omega(1-\beta n\cos\theta)] -$$

$$-n^2\omega\left(1-\frac{\beta}{n}\cos\theta\right)\delta^1[\omega(\beta n\cos\theta-1)]\Big\}\,d\omega\,dO. \tag{9}$$

Стоящие под знаком интегрирования в (9) дельта-функция и ее производная связывают $\cos\theta$ и ω, так что в области монотонности $n(\omega)$ при каждом значении ω происходит эффективное взаимодействие только с теми волнами, волновые векторы которых лежат на поверхности конуса с углом раствора $\theta(\omega) = \arccos\frac{1}{n(\omega)\beta}$ (считаем для простоты, что это уравнение имеет один корень). Эти конусы, однако, заполняют целый объем, если $n(\omega) \neq \text{const}$ и $I(\omega, \theta, \varphi)$ отлична от нуля в некотором конечном интервале частот. При этом, очевидно, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. Если падающее излучение изотропно, то, интегрируя по dO с учетом (2), получим (1), т. е. в этом случае будет поглощение. Если падающее излучение неизотропно $I_\pi(\omega, \theta, \varphi) \equiv I_\pi(\omega, \theta)$, то интегрирование по $d\Omega$ дает

$$P_\pi = \frac{e^2\beta\pi^3 c}{\mathscr{E}_0}\int\limits_{n\beta>1}\frac{1}{n\omega}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left[\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)\frac{\partial I(\omega,\theta(\omega))}{\partial\cos\theta} -\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n\beta}I_\pi(\omega,\theta(\omega))\right]d\omega. \tag{10}$$

В этом случае возможно усиление, когда $I_\pi(\omega, \theta)$ — достаточно быстро возрастающая функция θ в окрестности точки $\theta(\omega)$. Если $I_\pi(\omega, \theta)$ зависит от θ как $\cos^\nu\theta$, то происходит усиление на частотах, удовлетворяющих неравенству

$$\beta n(\omega) < \sqrt{\frac{\nu+2}{\nu}}. \tag{11}$$

Формула (9) позволяет также выяснить, какова должна быть частотная зависимость функции $I_\pi(\omega, \theta, \varphi)$ для существования отрицательного поглощения. С этой целью проинтегрируем (9) по $d\omega$, считая опять для простоты записи, что уравнение

$$\beta n(\omega)\cos\theta = 1 \tag{12}$$

имеет один корень $\omega = \omega(\theta)$.

В результате получим

$$P_\pi = \frac{4\pi^2 e^2 c}{\mathscr{E}_0}\int\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{n'\omega(\theta)}\left\{\left[\beta^2\cos^2\theta + \frac{\partial}{\partial\omega}\times\right.\right.$$

$$\times \left. \frac{n\omega\left(1-\frac{\beta}{n}\cos\theta\right)}{\frac{d}{d\omega}(\omega n)-\frac{1}{\beta\cos\theta}}\right|_{\omega=\omega(\theta)}\Bigg] I_\pi(\omega(\theta),\ \theta,\ \varphi)+$$

$$\left.+\frac{1-\beta^2\cos^2\theta}{n'\beta\cos\theta}\ \frac{\partial I(\omega(\theta),\ \theta,\ \varphi)}{d\omega}\right\} dO,\ n'\equiv n'(\theta), \tag{13}$$

где $n'(\theta)=\frac{dn}{d\omega}$ с последующей подстановкой $\omega(\theta)$. Отметим, что интегрирование по $\cos\theta$ должно вестись только в той области значений θ, в которой уравнение (12) имеет действительное решение, т. е. во всех случаях, когда $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$.

В области нормальной дисперсии ($n'>0$) и при частотах значительно меньших собственных частот среды, выполняется соотношение[1]

$$\frac{d^2(\omega n)}{d\omega^2}=3n'-\frac{\omega n'^2}{n}, \tag{14}$$

используя которое можно (13) преобразовать так:

$$P_\pi=\frac{8\pi^2e^2c}{\mathscr{E}_0}\int\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{n'(\theta)\,\omega(\theta)}\left\{\left(1-\frac{1-\beta^2\cos^2\theta}{\beta\cos\theta n'(\theta)\,\omega(\theta)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times I_\pi(\omega(\theta),\ \theta,\ \varphi)+\frac{(1-\beta^2\cos^2\theta)}{2n'(\theta)\,\beta\cos\theta}\ \frac{\partial I_\pi(\omega(\theta),\ \theta,\ \varphi)}{\partial\omega}\right\} dO.$$

Условие возрастания $I_\pi(\omega,\ \theta,\ \varphi)$ как функции ω не медленнее, чем ω^2, гарантирует положительность подынтегрального выражения. Это условие является, однако, весьма завышенным и может быть сильно ослаблено в конкретных случаях.

Учет затухания, обусловленного соударениями

В уравнении (4) процессы, связанные с потерями, не учитываются. Однако поскольку в нашей постановке задачи считается, что наличие электронного пучка не меняет свойств среды, то, очевидно, диссипативные процессы, возникающие при движении пучка в среде, должны быть учтены дополнительно. В случае, когда определяющим фактором являются столкновения, можно получить выражение для средней мощности, лишь видоизменив процедуру усреднения. В самом деле, если последнее столкновение имело место при $t=0$, то мощность излучения (поглощения) в момент t определяется формулами (6) и (7), а вероятность того, что последнее столкновение произошло в интервале dt в момент t, равна [3]

$$\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}dt,$$

где τ — среднее время свободного пробега.

---

[1] Соотношение (14) справедливо в области частот, в которой диэлектрическая проницаемость может быть представлена в виде $\varepsilon=a+b\omega^2$.

Тогда средняя мощность равна

$$P_{\rho}^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \int_{0}^{\infty} P_{\rho}(t)\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt. \tag{15}$$

Подставляя (6) и (7) в (15), найдем

$$P_{\sigma}^{(\tau)} = \frac{4\pi e^2 c\tau}{\mathscr{E}_0} \int I_{\sigma}(\omega, \theta, \varphi) \frac{\left(\beta \cos\theta \frac{1}{n(\omega)}\right) d\omega\, d\Omega}{1 + \tau^2\omega^2 (\beta n \cos\theta - 1)^2}. \tag{16}$$

$$P_{\pi}^{(\tau)} = \frac{4\pi e^2 c\tau}{\mathscr{E}_0} \int \frac{I_{\pi}(\omega, \theta, \varphi)}{n(\omega)} \frac{1}{1 + \tau^2\omega^2 (n\beta\cos\theta - 1)^2} \Bigg[\beta^2 \sin^2\theta + n\beta\cos\theta -$$

$$- 1 + \frac{2n^2\omega^2\beta^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{\beta}{n}\cos\theta\right) \tau^2 (\beta n \cos\theta - 1)}{1 + \tau^2\omega^2 (n\beta\cos\theta - 1)^2} \Bigg] dO\, d\omega. \tag{17}$$

При $\tau \to \infty$ $P_{\sigma}^{(\tau)} \to 0$, а $P_{\pi}^{(\tau)}$ переходит в (9). Из формулы (16) следует, что при отклонении от резонанса (12) происходит взаимодействие также и с σ-компонентом внешнего поля, причем, если $I(\omega, \theta, \varphi)$ отлична от нуля только внутри черенковского конуса, т. е. при $\cos\theta > 1/n\beta$, то имеет место усиление волны. При равномерном уголовном распределении внутри конуса мощность индуцированного излучения σ-компонента равна

$$P_{\sigma}^{(\tau)} = \frac{4\pi^2 e^2 c}{\mathscr{E}_0 \tau\beta} \int \frac{I_{\sigma}(\omega)}{\omega^2 n^2} \ln\left[1 + \tau^2\omega^2 (\beta n - 1)^2\right] d\omega.$$

В той же части спектрально-углового распределения потока энергии внешнего излучения, для которой $\cos < 1/n(\omega)\beta$, наблюдается поглощение. Что касается π-компонента, то он усиливается внутри черенковского конуса, на самом конусе и в малой области вне его, точнее в области выполнения неравенства

$$\cos\theta > \frac{1}{n\beta} - \frac{\beta}{n} \frac{1}{\omega^2 \tau^2 (\beta^2 n^2 - 1)}.$$

Фактически, во всей области интегрирования $\omega\tau \gg 1$, поэтому существенный вклад дает только узкая область значений ω и θ вблизи резонанса (12).

Отметим, что хотя рассуждения были проведены для случая, когда τ обязано столкновениям, формулы (16) и (17) сохраняют свой вид, если τ — эффективное время жизни стационарного состояния (в котором первоначально находятся все электроны), обусловленные затуханием за счет любых релаксационных процессов.

Индуцированное черенковское излучение в однородном магнитном поле

При движении заряженной частицы в среде во внешних статических полях черенковское излучение трудно отделить от излучения, обязанного своим происхождением наличию внешних полей [4]. Это, однако, легко сделать в простом случае, когда частица движется равномерно и прямолинейно, как и в отсутствие этих постоянных полей, что, очевидно, осуществляется только при движении в однородном магнитном поле параллельно силовым линиям. Рассмотрим задачу об индуцированном излучении в этой системе, пренебрегая влиянием магнитного

поля на свойства среды. Внешнее переменное электромагнитное поле будем считать неполяризованным. Тогда для усреднения мы можем использовать формулу

$$\langle E_{\vec{k}i} E^*_{\vec{k}'j} \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{(2\pi)^4 c^2 I(\omega, \theta, \varphi)}{V n^2 \omega \dfrac{d(n^2\omega^2)}{d\omega}}, \tag{18}$$

где

$$I(\omega, \theta, \varphi) = I_\pi + I_\sigma = 2I_\pi(\omega, \theta, \varphi) \tag{19}$$

и добавлен множитель, учитывающий поперечность.

Вводя вектор $\vec{\Omega} = -\dfrac{e\vec{H}c}{\mathscr{E}_0}$, где $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\vec{H} \| \vec{v}^{(0)}$, можем для $\vec{v}^{(1)}(t)$ записать уравнение

$$\frac{d^2 \vec{v}^{(1)}}{dt^2} + \Omega^2 \vec{v}^{(1)} = \sum_{\vec{k}} \frac{d\vec{F}_{\vec{k}}}{dt} + [\vec{\Omega} \vec{F}_{\vec{k}}] + \vec{\Omega} \int_0^t (\vec{\Omega} \vec{F}_{\vec{k}})\, dt' = \vec{f}(t). \tag{20}$$

Здесь

$$\vec{F}_{\vec{k}} = \frac{ec^2}{\mathscr{E}_0 \omega} \left\{ \vec{E}_{\vec{k}} (\omega - \vec{k}\vec{V}^{(0)}) + \left(\vec{k} - \omega \frac{\vec{V}^{(0)}}{c^2} \right) (\vec{v}^{(0)} \vec{E}_{\vec{k}}) \right\} e^{i(\omega - \vec{k}\vec{V}^{(0)})t} + \text{к. с.}$$

Решая уравнение (20) при нулевых начальных условиях, найдем

$$\vec{v}^{(1)} = \frac{1}{\Omega} \int_0^t \sin\Omega(t - t') \vec{f}(t')\, dt', \tag{21}$$

$$\vec{r}^{(1)} = \frac{1}{\Omega^2} \int_0^t [1 - \cos(t - t')] \vec{f}(t')\, dt'. \tag{22}$$

Подставляя (21) и (22) в (5) и усредняя согласно (18), получим

$$\begin{aligned} P_{(H)}(t) = -\frac{2\pi e^2 c}{\mathscr{E}_0} \int \Bigg\{ & [2(1 - \beta n \cos\theta) - \beta^2 \cos^2\theta] \frac{\omega}{\Omega} \times \\ & \times (1 - \beta n \cos\theta) \left[\frac{\sin(\eta - \Omega)t}{2(\eta - \Omega)} - \frac{\sin(\eta + \Omega)t}{2(\eta + \Omega)} \right] + \\ & + \sin^2\theta (1 - \beta^2) \left[\frac{\sin \eta t}{\eta} - \frac{\sin(\eta + \Omega)t}{2(\eta + \Omega)} - \frac{\sin(\eta - \Omega)t}{2(\eta - \Omega)} \right] + \\ & + \left(\frac{\beta}{n} \cos\theta - 1 \right) \beta^2 n^2 \sin^2\theta\, \omega \left[\frac{\sin \eta t}{\Omega^2} - \frac{\eta \sin(\eta + \Omega)t}{2(\eta + \Omega)\Omega^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\eta \sin(\eta - \Omega)t}{2(\eta - \Omega)\Omega^2} \right] + \beta n \omega (1 - \beta^2) \sin^2\theta \cos\theta \left[\frac{\sin \eta t}{\eta^2} - \frac{t \cos \eta t}{\eta} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\eta + \Omega)t}{2\Omega(\eta + \Omega)} - \frac{\sin(\eta - \Omega)t}{2\Omega(\eta - \Omega)} \right] \Bigg\} \frac{I(\omega, \theta, \varphi)\, d\omega\, dO}{n(\omega)}, \end{aligned}$$

где $\eta = \omega - \vec{k}\vec{v}^{(0)}$.

Как видно из (23), для каждой частоты ω теперь имеется три резонанса:

$$\cos\theta^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\beta n(\omega)},$$
$$\cos\theta^{(\pm)}(\omega) = \cos\theta^{(0)}\left(1 \pm \frac{\Omega}{\omega}\right), \tag{23}$$

которые сливаются при исчезновении магнитного поля. При выполнении условия $\omega > \Omega/1-\beta$ эффект может происходить только в среде с $n > 1$. Усредняя по времени (8) и интегрируя затем по $d\Omega$, получим выражения для средней интенсивности индуцированного излучения на каждом из резонансов в отдельности:

$$P^{(0)}_{(H)} = \frac{4\pi^3 e^2 c(1-\beta^2)}{\mathscr{E}_0\beta^2}\int\frac{1}{n^3\omega}\left[\sin^2\theta^{(0)}\frac{\partial I(\omega,\theta^{(0)})}{\partial\cos\theta} - 2\cos\theta^{(0)} I(\omega,\theta^{(0)})\right]d\omega,$$

$$P^{(\pm)}_{(H)} = \pm\frac{4\pi^3 e^2 c}{\mathscr{E}_0\beta}\int\limits_{|\cos\theta^{(\pm)}|<1}\frac{I(\omega,\theta^{(\pm)})}{2n^2\Omega}\left[\frac{2\Omega^2}{\omega^2} + \beta^2 n^2\sin^2\theta^{(0)}\sin^2\theta^{(\pm)}\right]d\omega.$$

Критерий излучения на «нулевом» резонансе, очевидно, совпадает с (11); на резонансе «минус» — всегда поглощение, на резонансе «плюс» — всегда излучение.

Представляет интерес предельный переход $\Omega \to 0$. Величины $P^{(\pm)}_{(H)}$ растут, углы $\theta^{(\pm)}$ сближаются, при этом сумма $P^{(+)}_{(H)} + P^{(-)}_{(H)}$ остается конечной. Разлагая $I(\omega, \theta^{(\pm)})$ в ряд по Ω и удерживая лишь неисчезающие при $\Omega \to 0$ члены, придем с учетом (19) к формуле (10).

В заключение автор благодарит проф. А. А. Соколова и Ю. Г. Павленко за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А. ДАН, 28, 415, 1940; Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958, стр. 226.
2. Цытович В. Н. «Успехи физических наук», 89, 89, 1966; Труды ФИАН, 32, 130, 1966.
3. Троуп Г. Квантовые усилители и генераторы. М., ИЛ, 1961.
4. Цытович В. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мех., мат., астрон., физ., химии, № 11, 27, 1951.

Поступила в редакцию
25.1 1967 г.

Кафедра
теоретической физики