Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1968

УДК 621.378.1

Д. В. ГАЛЬЦОВ, В. Ч. ЖУКОВСКИЙ

ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО ВИНТОВЫМ ТРАЕКТОРИЯМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследуется спектрально-угловое распределение мощности индуцированного излучения электронов, движущихся по винтовым траекториям в магнитном поле при наличии разброса по энергиям или по углу Ф между направлением импульса и вектором напряженности магнитного поля. Показано, что при определенных условиях может наблюдаться усиление при «нормальной» заселенности уровней, когда распределение по энергиям есть убывающая функция.

В проведенных в последнее время экспериментах [1, 2] наблюдалось усиление электромагнитного излучения электронами, движущимися в магнитном поле. Теоретически этот эффект исследовался в работах [3, 4], в которых было показано, что усиление возникает за счет конечности времени жизни электрона τ в начальном состоянии. В настоящей работе мы рассмотрим более реальный случай взаимодействия электронов в магнитном поле с излучением, обладающим произвольными спектральными и угловыми характеристиками, не ограничиваясь конечностью времени жизни τ и учитывая продольное движение вдоль магнитного поля. При этом оказывается, что даже при $\tau \to \infty$, когда эффект, описанный в [3, 4], исчезает, усиление должно иметь место.

Будем предполагать плотность неравновесной системы электронов достаточно малой, так что коллективными свойствами этой системы можно пренебречь ($\varepsilon^t \simeq 1$).

Рассмотрим взаимодействие электронов, движущихся в однородном магнитном поле $\vec{H} \parallel Oz$, характеризующихся функцией распределения по импульсам $f(p_\perp, p_z)$ $(p_\perp = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2})$ с внешней электромагнитной волной частоты ω, распространяющейся в направлении $\vec{k}^0 = \{0, \sin\theta, \cos\theta\}$, со спектральной интенсивностью $I_{\vec{k},\lambda}$. В результате индуцированных переходов на резонансной частоте $\omega_{12} = \nu\omega_c + \beta_z\omega\cos\theta$ будет излучаться суммарная мощность

$$W_\lambda = -(2\pi)^2 e_0^3 c^2 H \sum_\nu \nu \int dp_\perp \int dp_z f(p_\perp, p_z) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} \times$$

$$\times \int do I_{\vec{k},\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial p_\perp} + \frac{p_\perp \omega \cos\theta}{\nu e_0 H} \frac{\partial}{\partial p_z} \right) \frac{\omega_{12} S_\lambda g(\omega - \omega_{12})}{E^2}. \quad (1)$$

Здесь $S_\sigma = |\bar{P}_x|^2$, $S_\pi = |\bar{P}_y|^2 \cos^2\theta - |\bar{P}_y||\bar{P}_z| \sin^2\theta + |\bar{P}_z|^2 \sin^2\theta$; $\bar{P}_x = i p_\perp J'_\nu(z)$, $\bar{P}_y = \frac{\nu}{z} p_\perp J_\nu(z)$, $\bar{P}_z = p_z J_\nu(z)$, $z = \frac{\omega p_\perp \sin\theta}{e_0 H}$, $\omega_c = \frac{e_0 H c}{E}$, E — энергия электрона.

Конечность времени жизни электрона учитывается введением фактора Лоренца

$$g = \frac{4\tau}{1 + 4\tau^2(\omega - \omega_{12})^2}.$$

В пределе бо́льших времен жизни τ, когда $g(\omega - \omega_{12}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_{12})$ ~~(1)~~, согласуется с соответствующей формулой работы [5].

Рассмотрим сначала случай δ-образного распределения по импульсам

$$f(p'_\perp, p'_z) = \frac{N_0}{2\pi p_\perp} \delta(p_\perp - p'_\perp)\,\delta(p_z - p'_z).$$

Величина и знак мощности (1) (т. е. усиление или поглощение) оказываются очень чувствительными к спектральным и угловым характеристикам внешнего излучения $I_{\vec{k},\lambda}$. Поэтому рассмотрим сначала спектральное распределение излученной мощности $dW_\lambda/d\omega$.

Проведем в формуле (1) интегрирование по углам, предполагая, что область δ значений $\cos\theta$, при которых $I_{\vec{k},\lambda}$ отлична от нуля, достаточно велика, а именно:

$$\delta \gg \frac{1}{\tau\omega|\beta_z|}. \qquad (2)$$

В результате получим

$$\frac{dW_\lambda}{d\omega} = -\frac{8\pi^2 N_0 e_0^2 c}{E\beta|\cos\Phi|} \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} \left(G_{1\lambda} q_\lambda(\cos\theta_\nu) + F_{1\lambda} \frac{dq_\lambda(\cos\theta_\nu)}{d\cos\theta_\nu} \right) I_\lambda(\omega). \qquad (3)$$

Здесь

$$\nu_1 = \left[\frac{\omega}{\omega_c}(1 - \beta|\cos\Phi|) + 1 \right], \quad \nu_2 = \left[\frac{\omega}{\omega_c}(1 + \beta|\cos\Phi|) \right],$$

$$\cos\theta_\nu = \frac{\omega - \nu\omega_c}{\omega\beta\cos\Phi}, \quad \cos\Phi = \frac{\beta_z}{\beta}, \quad z = \frac{\omega}{\omega_c}\beta\sin\theta_\nu \sin\Phi,$$

а квадратные скобки означают, что берется целая часть, и

$$\begin{aligned} F_{1\sigma} &= \frac{1}{2}\frac{\beta\sin^2\Phi\sin^2\theta_\nu}{\omega\cos\Phi} J'^2_\nu(z), \\ F_{1\pi} &= \frac{1}{2}\frac{(\cos\theta_\nu - \beta\cos\Phi)^2}{\omega\beta\cos\Phi} J^2_\nu(z), \end{aligned} \qquad (4)$$

$$G_{1\sigma} = \frac{(1 - \beta\cos(\theta_\nu - \Phi))(1 - \beta\cos(\theta_\nu + \Phi))}{\omega_c\beta\sin\Phi\sin\theta_\nu} \left(1 - \beta\frac{\cos\theta_\nu}{\cos\Phi}\right) J'_\nu(z) J_\nu(z),$$

$$G_{1\pi} = \frac{(\cos\theta_\nu - \beta\cos\Phi)^2}{\omega_c\beta\sin\Phi\sin\theta_\nu} \left(1 - \beta\frac{\cos\theta_\nu}{\cos\Phi}\right) J'_\nu(z) J_\nu(z) + \frac{\cos\theta_\nu - \beta\cos\Phi}{\omega\beta\cos\Phi} J^2_\nu(z).$$

Как видим, углы, ответственные за излучение данной частоты ω, должны состоять из серии дискретных значений θ_ν.

При выводе формул (3) — (4) предполагаем, что $I_{\vec{k},\lambda}$ может быть записана в виде

$$I_{\vec{k},\lambda} = \frac{1}{2\pi} I_\lambda(\omega)\, q_\lambda(\cos\theta).$$

В слаборелятивистском приближении ($\beta^2 \neq 0$, $\beta^4 = 0$), когда существенно только дипольное излучение, можем положить

$$J_1(z) = \frac{z}{2}, \quad J_1'(z) = \frac{1}{2},$$

тогда формулы (3 — 4) дают

$$\frac{dW_\sigma}{d\omega} = -\frac{2\pi^2 N_0 e_0^2 c}{\omega\beta E\,|\cos\Phi|}\left[\left(1 - \beta\frac{\cos\theta_1}{\cos\Phi}\right) q_\sigma(\cos\theta_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta\sin^2\Phi\sin^2\theta_1}{2\cos\Phi}\,\frac{dq_\sigma(\cos\theta_1)}{d\cos\theta_1}\right] I_\sigma(\omega), \tag{5}$$

$$\frac{dW_\pi}{d\omega} = -\frac{2\pi^2 N_0 e_0^2 c\,(\cos\theta_1 - \beta\cos\Phi)^2}{\omega\beta E\,|\cos\Phi|}\left[\left(1 - \beta\frac{\cos\theta_1}{\cos\Phi}\right) q_\pi(\cos\theta_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta\sin^2\Phi\sin^2\theta_1}{\cos\Phi(\cos\theta_1 - \beta\cos\Phi)}\, q_\pi(\cos\theta_1) + \frac{\beta\sin^2\theta_1\sin^2\Phi}{2\cos\Phi}\,\frac{dq_\pi(\cos\theta_1)}{d\cos\theta_1}\right] I_\pi(\omega). \tag{6}$$

Из формулы (5) следует, что при изотропном внешнем излучении ($dq_\lambda/d\cos\theta = 0$) наблюдается усиление σ-компонента (т. е. $dW_\sigma/d\omega > 0$), если выполнено условие

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\Phi} > \frac{1}{\beta}. \tag{7}$$

Ясно, что усиление возможно только в том случае, если $\Phi \sim \frac{\pi}{2}$, так как должно быть $|\cos\Phi| < \beta \ll 1$. При этом $|\cos\theta_1| \leqslant 1$, так что совместно с (7) получаем $\omega_c \operatorname{ctg}^2\Phi < \omega - \omega_c \leqslant \omega\beta|\cos\Phi|$. Максимальная интенсивность будет при $|\cos\theta_1| = 1$. Так, при $\beta_z = 1\cdot 10^{-3}$ и $\beta_\perp = 1\cdot 10^{-1}$ частота должна лежать в пределах $1\cdot 10^{-4}\omega_c < \omega - \omega_c \leqslant 1\cdot 10^{-3}\omega_c$. Что касается π-компонента, то он также усиливается при выполнении условия (7), если при этом $|\cos\theta_1| \sim 1$ (второе слагаемое в (6) мало).

Если внешнее излучение неизотропно и имеет максимум при $\theta = \hat{\theta}$, в формулах (5) — (6) становится существенной производная $dq_\lambda/d\cos\theta$. Зададим, например, $q_\lambda(\cos\theta)$ в виде

$$q_\lambda(\cos\theta) = \frac{2\delta}{\pi(\delta^2 + 4(\cos\hat{\theta} - \cos\theta)^2)}. \tag{8}$$

Будем считать $\hat{\theta}$ близким к $\pi/2$, а ширину распределения δ малой, при этом $\int\limits_{-1}^{1} dx\, q_\lambda(x) = 1$.

Обозначим $\xi = \frac{2}{\delta}(\cos\hat{\theta} - \cos\theta_1)$, тогда

$$\frac{dW_\sigma}{d\omega} = -\frac{8\pi^2 N_0 e_0^2 c I_\sigma(\omega)}{\omega\beta E\,|\cos\Phi|\,\delta(1+\xi^2)}\left(1 - \beta\frac{\cos\theta_1}{\cos\Phi} + \frac{2\beta\sin^2\Phi\,\xi}{\delta\cos\Phi(1+\xi^2)}\right). \tag{9}$$

Следовательно, если $\Phi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то выражение в скобках может стать отрицательным (усиление) при условии $\hat{\theta} < \frac{\pi}{2}$, $\beta\sin^2\Phi > \delta\cos\Phi$, когда $\xi < 0$.

Пусть $\cos\widehat{\theta} = \beta\cos\Phi = \beta_z$, а $\beta_\perp^2 = 0{,}01$, $\beta_z = 0{,}01$ $\left(\text{т. е. } \frac{mv_\perp^2}{2} = 2{,}5 \ \text{Кэв}, \ \frac{mv_z^2}{2} = 25 \ \text{эв}\right)$ и $\delta = 0{,}1$, а $\tau\omega_c = 10^4$; условие (2) заведомо удовлетворяется $\left(\frac{1}{\delta\tau\omega_c} = 0{,}001 \ll \beta_z\right)$ и усиление имеет место. Если τ — время пролета через резонатор, длина которого $l \sim 50$ *см*, то при данных параметрах усиливаются длины волн порядка

$$\lambda = \frac{l}{2\pi\beta_z\tau\omega_c} \simeq 1 \ \text{мм}.$$

Этот эффект, возникающий при $\beta_z \neq 0$, по-видимому, наблюдается одновременно с эффектом Шнейдера [3] (связанным только с конечностью τ) в экспериментах по усилению в гиротроне [1,2].

Рассмотрим случай релятивистских скоростей, когда возможно излучение гармоник циклотронной частоты. При этом в формуле (3) сумма по ν будет включать конечное число членов. Обратимся сначала к исследованию σ-компонента. Аргумент функций Бесселя $z = \nu\eta$ всегда меньше ν, так как

$$\eta = 1 - \frac{1 - \beta\cos(\theta_\nu + \Phi)}{1 - \beta\cos\theta_\nu\cos\Phi} < 1.$$

Известно [6], что функция $J_\nu(z)$ монотонно возрастает при $0 < z < \nu$, оставаясь при этом положительной, следовательно, в формуле (3) величина $J_\nu J'_\nu > 0$. Поэтому те $G_{1\sigma}$ в сумме (3), для которых

$$\frac{\cos\theta_\nu}{\cos\Phi} > \frac{1}{\beta}, \tag{10}$$

будут отрицательны. Если мы посылаем достаточно узкий пучок света в направлении, близком к θ_ν с шириной углового распределения

$$\delta < |\cos\theta_\nu - \cos\theta_{\nu-1}|, \ \text{т. е.} \ \frac{\omega_c}{\omega\beta|\cos\Phi|} > \delta, \tag{11}$$

в сумме останется только одно слагаемое. Если при этом направление максимальной интенсивности пучка θ смещено относительно направления θ_ν:

$$\begin{aligned} \widehat{\theta} &> \theta_\nu \quad \text{при} \quad \Phi < \frac{\pi}{2}, \\ \widehat{\theta} &< \theta_\nu \quad \text{при} \quad \Phi > \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \tag{12}$$

то второе слагаемое в (3) также отрицательно, т. е. имеет место усиление $(dW_\sigma/d\omega > 0)$.

Что касается π-компонента, то второе слагаемое в $G_{1\pi}$ при выполнении условия (10) положительно, однако и в этом случае усиление возможно, если абсолютная величина производной $dq_\pi/d\cos\theta$ в точке θ_ν достаточно велика и (12) имеет место.

Рассмотрим полную мощность излучения в единицу телесного угла dW_λ/dO. При этом оказывается существенным спектральное распределение падающего пучка $I_\lambda(\omega)$ вблизи резонансных частот $\omega_\nu = \frac{\nu\omega_c}{1 - \beta_z\cos\theta}$. Действительно, проинтегрируем (1) по частям по переменной ω. Если область частот $\Delta\omega$, в которой $I_\lambda(\omega)$ отлично от нуля, больше, чем обратное время жизни $1/\tau(1-\beta_z\cos\theta)$, то с достаточной точностью $g(\omega-\omega_{12})$ можно заменить δ-функцией. В результате получим

$$\frac{dW_\sigma}{do}=-4\pi N_0\frac{e_0^2c}{E}\sum_\nu\left\{\left[-\frac{\nu}{\eta}(1-\eta^2)^2J_\nu J'_\nu+\frac{1}{2}\eta^2J'^2_\nu\right]I_\sigma(\omega_\nu)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\eta^2\omega_\nu J'^2_\nu\frac{dI_\sigma}{d\omega_\nu}\right\}q_\sigma(\cos\theta);\quad \frac{dW_\pi}{do}=$$

$$=-4\pi\frac{N_0e_0^2c}{E}\frac{(\cos\theta-\beta_z)^2}{\beta_\perp^2\sin^2\theta}\sum_\nu\left\{\left[\nu\eta(1-\eta^2)J_\nu J'_\nu-\frac{1}{2}\eta^2J_\nu^2\right]I_\pi(\omega_\nu)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\eta^2\omega_\nu J_\nu^2\frac{dI_\pi}{d\omega_\nu}\right\}q_\pi(\cos\theta), \tag{13}$$

$$\eta=\frac{\beta_\perp\sin\theta}{1-\beta_z\cos\theta},\quad J_\nu\equiv J_\nu(\nu\eta).$$

В случае неполяризованной волны из (13) для полной мощности будем иметь формулу, приведенную в [5].

В ультрарелятивистском пределе можно показать, что становится возможным усиление при совпадении максимума $I_\lambda(\omega)$ с гармониками частоты ω_1. Рассмотрим для этого случай, когда $1-\beta^2\ll1$ и $\theta-\Phi=\alpha\ll1$, т. е. $\eta\sim1$. Если область частот, в которой $I_\lambda(\omega)$ отлична от нуля, соответствует номерам гармоник, удовлетворяющим условиям

$$1\ll\nu\ll\nu_{max}=(1-\eta^2)^{-\frac{3}{2}}, \tag{14}$$

то для функций Бесселя $J_\nu(\nu\eta)$ и $J'_\nu(\nu\eta)$ [6] справедливы приближенные выражения $J_\nu(\nu\eta)=0{,}45\nu^{-\frac{1}{3}}$, $J'_\nu(\nu\eta)=0{,}41\nu^{-\frac{2}{3}}$, используя которые найдем:

$$\frac{dW_\sigma}{do}=1{,}05N_0\frac{e_0^2c}{E}\sum_\nu\nu^{-\frac{4}{3}}\left[-I_\sigma(\omega_\nu)+\omega_\nu\frac{dI_\sigma(\omega_\nu)}{d\omega_\nu}\right]q_\sigma(\cos\theta), \tag{15}$$

$$\frac{dW_\pi}{do}=1{,}27\cdot\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta}\frac{N_0e_0^2c}{E}\sum_\nu\nu^{-\frac{2}{3}}\left[I_\pi(\omega_\nu)+\omega_\nu\frac{dI_\pi(\omega_\nu)}{d\omega_\nu}\right]q_\pi(\cos\theta).$$

При достаточно узкой линии $I_\lambda(\omega)$, когда из суммы вырезается только один член с $\nu=\frac{\omega}{\omega_c}(1-\beta_z\cos\theta)$, из (15) видно, что π-компонент мощности усиливается даже при совпадении ω_ν с максимумом ω_0 функции $I_\pi\left(\frac{dI_\pi}{d\omega_\nu}=0\right)$, а σ-компонент — только при смещении ω_0 вправо от ω_ν, т. е.

$$\omega_\nu\frac{dI_\sigma}{d\omega_\nu}>I_\sigma(\omega_\nu). \tag{16}$$

Рассмотрим влияние на усиление разброса электронов по импульсам. Переходя к функции распределения $f(p,\Phi)$, где $p=|\vec{p}|$, $\Phi=\operatorname{arctg}\frac{p_\perp}{p_z}$, предположим, что пучок моноэнергетический, а направление импульса относительно магнитного поля имеет разброс $\delta_\Phi \gg (\tau\omega\beta|\cos\theta|)^{-1}$.

Тогда, записывая $f(p, \Phi)$ в виде

$$f(p, \Phi) = \frac{f(\Phi)}{2\pi p^2}\delta(p - p')$$

и учитывая формулу (1), мы получим следующее выражение для спектральной мощности излучения в единицу телесного угла:

$$\frac{dW_\lambda}{d\omega\, d0} = -\frac{8\pi^2 e^2 c}{E}\int_0^\pi d\Phi \sin\Phi f(\Phi)\, I_{\vec{k},\lambda}\sum_\nu\left(G_\lambda\delta(\omega-\omega_{12}) - F_\lambda\frac{\partial}{\partial\omega_{12}}\delta(\omega-\omega_{12})\right). \tag{17}$$

Интегрирование по Φ в (17) проводится элементарно благодаря наличию δ-функции, связывающей фиксирование ω, θ и p с углом Φ, для которого получим следующий ряд дискретных значений:

$$\Phi_\nu = \arccos\frac{\omega - \nu\omega_c}{\omega\beta\cos\theta}.$$

Результат интегрирования по Φ может быть получен из формул (3)—(4) формальной заменой $\theta_\nu \to \Phi_\nu$, $\Phi \to \theta$. Проведя эту замену в формулах предыдущего параграфа, можно получить условия излучения. В частности, в случае изотропного распределения $f(\Phi) = \mathrm{const}$ усиление σ-компонента возможно при $\cos\Phi_\nu/\cos\theta > \frac{1}{\beta}$.

Что касается π-компонента, то он взаимодействует с электронами слабее, так как общий множитель $(\cos\theta - \beta\cos\Phi_\nu)$ обращается в нуль как раз в той точке, где аргумент бесселевых функций $\nu\eta$ максимален. Однако усиление возможно и в этом случае. Так, при нерелятивистских скоростях электронов π-компонент излучения усиливается при тех же условиях, что и σ-компонент. При $\beta \sim 1$ эффект усиления также может существовать при неизотропном распределении по Φ с достаточной абсолютной величиной производной $\frac{df}{d\Phi}$ в резонансных точках.

Рассмотрим случай, когда функция распределения электронов по импульсам обладает конечной шириной δ_p, а угол между направлением магнитного поля и векторами импульсов фиксирован:

$$f(p, \Phi') = \frac{1}{2\pi}f(p)\,\delta(\cos\Phi - \cos\Phi'). \tag{18}$$

Если величина δ_p удовлетворяет условию

$$\frac{E}{(\tau\omega c\,|\beta - \cos\theta\cos\Phi|)} \ll \delta_p, \tag{19}$$

то интегрирование по p в (1) проводится элементарно, так как с достаточной точностью можно заменить фактор g на δ-функцию. Частота перехода ω_{12} в аргументе δ-функции зивисит от p нелинейно, поэтому импульсы, ответственные за излучение данной частоты ω под данным углом θ, будут состоять, вообще говоря, из двух серий дискретных значений. При этом, когда θ и Φ лежат в одной четверти, т. е. $\cos\theta\cos\Phi > 0$, то резонансные значения p_ν могут быть записаны так:

$$p_\nu^{(\pm)} = \frac{mc\left(\frac{\nu\Omega}{\omega}\right)}{1-\cos^2\theta\cos^2\Phi}\left[\cos\theta\cos\Phi \pm \sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\nu\Omega}\right)^2(1-\cos^2\theta\cos^2\Phi)}\right], \tag{20}$$

$\Omega = \frac{e_0H}{mc}$ — гиротронная частота, откуда видно, что $p_\nu^{(+)}$ лежит в «физической» области при

$$\frac{\nu\Omega}{\omega} > \sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2\Phi}, \tag{21}$$

а значения $p_\nu^{(-)}$ при

$$1 > \frac{\nu\Omega}{\omega} > \sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2\Phi}. \tag{22}$$

Заметим, что производная $\partial\omega_{12}/\partial p$ в точках $p_\nu^{(+)}$ и $p_\nu^{(-)}$ имеет разные знаки, а именно:

$$\left.\frac{\partial\omega_{12}}{\partial p}\right|_{p=p_\nu^{(\pm)}} = \mp\frac{\omega c}{E_\nu^{(\pm)}}\left|\beta_\nu^{(\pm)} - \cos\Phi\cos\theta\right|. \tag{23}$$

Учитывая это, получим

$$\frac{dW_\lambda}{d\omega\, dO} = \frac{8\pi^2e^2I_{\vec{k},\lambda}}{\omega}\sum_{\nu=\nu_1^{(+)}+1}^{\infty}\frac{p_\nu^{(+)2}}{|\beta_\nu^{(+)}-\cos\theta\cos\Phi|}\left[-P_\lambda(p_\nu^{(+)})f(p_\nu^{(+)}) + Q(p_\nu^{(+)})\frac{df}{dp_\nu^{(+)}}\right] +$$

$$+\frac{8\pi^2e^2I_{\vec{k},\lambda}}{\omega}\sum_{\nu=\nu_1^{(+)}}^{\nu_2^{(-)}}\frac{p_\nu^{(-)2}}{|\beta_\nu^{(-)}-\cos\theta\cos\Phi|}\left[-P_\lambda(p_\nu^{(-)})f(p_\nu^{(-)}) -\right.$$

$$\left.-Q_\lambda(p_\nu^{(-)})\frac{df}{dp_\nu^{(-)}}\right], \quad \nu_1^{(+)} = \left[\frac{\omega}{\Omega}\sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2\Phi}+1\right], \tag{24}$$

$$\nu_2^{(-)} = \left[\frac{\omega}{\Omega}\right].$$

В этих формулах

$$P_\sigma(p) = \frac{\nu}{\eta}(1-\eta^2)\frac{(\beta\cos\Phi-\cos\theta)(\cos\Phi-\beta\cos\theta)}{\beta-\cos\theta\cos\Phi}J_\nu J_\nu' -$$

$$-\frac{1}{2}\eta_1\left[1-\frac{(1-\beta^2)\cos\theta\cos\Phi}{\beta-\cos\theta\cos\Phi}\right]J_\nu'^2, \tag{25}$$

$$P_\pi(p) = \frac{(\cos\theta-\beta\cos\Phi)^2}{\beta^2\sin^2\theta\sin^2\Phi}\left[\nu\eta\frac{(\beta\cos\Phi-\cos\theta)(\cos\Phi-\beta\cos\theta)}{\beta-\cos\theta\cos\Phi}J_\nu J_\nu' -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\eta_1\left(1-\frac{(1-\beta^2)\cos\theta\cos\Phi}{\beta-\cos\theta\cos\Phi} - 2\beta\frac{\cos\Phi-\beta\cos\theta}{\cos\theta-\beta\cos\Phi}\right)J_\nu^2\right],$$

$$Q_\sigma(p) = \frac{1}{2}|\eta_1|\,p\,J_\nu'^2, \quad Q_\pi(p) = \frac{1}{2}|\eta_1|\,p\,J_\nu^2\frac{(\cos\theta-\beta\cos\Phi)^2}{\beta^2\sin^2\theta\sin^2\Phi},$$

$$\eta = \frac{\beta\sin\theta\sin\Phi}{1-\beta\cos\theta\cos\Phi}, \quad \eta_1 = \frac{\beta\sin^2\theta\sin^2\Phi}{\beta-\cos\theta\cos\Phi}, \quad J_\nu \equiv J_\nu(\nu\eta).$$

Величина $Q_\lambda(p)$ всегда положительна, поэтому, как видно из (24), в первой сумме благоприятным для излучения будет $\frac{df}{dp}>0$ (инверсионная заселенность), во второй же сумме, наоборот, благоприятной оказывается нормальная заселенность, т. е. $\frac{df}{dp}<0$. Минимальное значение p из серии $p_\nu^{(+)}$ согласно (20) совпадает с максимальным p из серии $p_\nu^{(-)}$ и равно

$$p_{\text{кр}}=mc\,\frac{\cos\theta\cos\Phi}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2\Phi}}. \tag{26}$$

Поэтому, если $f(p)$ отлична от нуля только в области $p>p_{\text{кр}}$, то в (24) остается только первая сумма и условие $\frac{df}{dp}>0$ является необходимым для усиления. Если же $f(p)$ отлична от нуля только при $p<p_{\text{кр}}$, то усиление возникает как раз при нормальной заселенности, т. е. при $\frac{df}{dp}<0$. Отметим, что это оказывается возможным благодаря релятивистской зависимости частоты перехода от импульса электрона.

В слаборелятивистском случае ($\eta\ll 1$, $p\ll mc$), если только Φ и θ не близки к $\frac{\pi}{2}$ (т. е. $p_{\text{кр}}\sim mc$), в формуле (24) остается лишь один член с $\nu=1$ во второй сумме.

Выражение для мощности принимает вид:

$$\frac{dW_\lambda}{d\omega\,dO}=\frac{2\pi^2e^2 I_{\vec{k},|\lambda}}{\omega}\,\frac{p_1^{(-)2}}{|\beta_1^{(-)}-\cos\theta\cos\Phi|}\,\varphi_\lambda;$$

$$\varphi_\sigma=\left[\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{\beta_1-2\cos\theta\cos\Phi}{\beta_1-\cos\theta\cos\Phi}\right)\eta_1-1\right]f(p_1^{(-)})-$$
$$-\frac{1}{2}|\eta_1|\,p_1^{(-)}\frac{df}{dp_1^{(-)}}; \tag{27}$$

$$\varphi_\pi=-(\cos\theta-\beta\cos\Phi)^2\left\{\left[1-2\eta_1+\frac{1}{2}\beta\eta_1\left(\frac{1}{\beta-\cos\theta\cos\Phi}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{2\cos\Phi}{\cos\theta-\beta\cos\Phi}\right)\right]f(p_1^{(-)})+\frac{1}{2}|\eta_1|\,p_1^{(-)}\frac{df}{dp_1^{(-)}}\right\}.$$

Пусть $\cos\theta=\cos\Phi\simeq 0{,}8$, $\omega=1{,}01\,\Omega$, тогда $p_1^{(-)}=0{,}01\,mc$, $\eta_1\simeq 1\cdot 10^{-3}$. В этом случае π-компонент излучения усиливается, а σ-компонент поглощается $\left(\text{если только } \frac{df}{dp_1^{(-)}} \text{ ограничена}\right)$.

В ультрарелятивистском случае $p>p_{\text{кр}}\gg mc$ в (24) остается только первая сумма. Положим $\theta=\Phi$ и $\nu\ll(1-\eta^2)^{-\frac{3}{2}}$. Используя аппроксимации функций J_ν, найдем, что усиление σ-компонента в этом случае возможно, если $f(p)$ отлична от нуля в области тех номеров ν, для которых выполнено условие

$$p_\nu^{(+)}\frac{d\ln f(p_\nu^{(+)})}{dp_\nu^{(+)}}>-1+\frac{(1-\beta^2)\cos^2\theta}{\beta-\cos^2\theta}-0{,}55\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\,(1-\beta^2)^3\,\nu^{\frac{4}{3}}, \tag{28}$$

и для π-компонента:

$$p_\nu^{(+)} \frac{d \ln f(p_\nu^{(-)})}{dp_\nu^{(-)}} > 1 + \frac{(1-\beta^2)\cos^2\theta}{\beta - \cos^2\theta} - 0{,}46 \frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta} (1-\beta^2)^2 \nu^{-\frac{2}{3}}. \quad (29)$$

Величина $p_{кр}$ сильно зависит от углов θ и Φ и может, вообще говоря, лежать далеко в релятивистской области. В этом случае, если $f(p) \neq 0$ лишь при $p < p_{рк}$, благоприятном для усиления, $\frac{df}{dp} < 0$ даже и при релятивистских энергиях. При этом, как было указано выше, существенным требованием является резкая анизотропия пучка. Полученные результаты свидетельствуют о том, что известный вывод [7] о невозможности отрицательного поглощения в магнитном поле в вакууме справедлив только для случая изотропного распределения электронов по импульсам при достаточной ширине энергетического спектра. Однако при неизотропном распределении или даже при изотропном, но имеющем резкий максимум по энергиям распределении электронов, усиление, как было показано выше, возможно. Кроме того, эффекта усиления можно добиться, используя неизотропное либо немонохроматическое внешнее излучение.

Авторы выражают благодарность проф. А. А. Соколову и И. М. Тернову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hirschfield J. L., Wachtel J. M. Phys. Rev. Lett., **12**, 533, 1964.
2. Гапонов А. В., Гольденберг А. Л., Григорьев Д. П., Орлова Т. М., Панкратова Т. Б., Петелин М. И. Письма ЖЭТФ, **2**, 430, 1965.
3. Schneider J. Phys. Rev. Lett., **2**, 504, 1959.
4. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **166**, 133, 1966. См. также «Синхротронное излучение», сб. статей под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., «Наука», 1966.
5. Цытович В. Н. «Изв. вузов», радиофизика, **6**, 918, 1963.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.
7. Железняков В. В. ЖЭТФ, **51**, 570, 1966.

Поступила в редакцию
5.4 1967 г.

Кафедра
теоретической физики