Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1968

УДК 551.557

А. Ф. ДЮБЮК

УЧЕТ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕТРА ПО ПОЛЮ ДАВЛЕНИЯ

Уравнения горизонтального движения упрощаются относительно основного потока. Предполагается, что основной поток геострофический, а поле давления известно. Система уравнений сводится к уравнению для комплексной скорости. Рассматривается три типа решений. Формы решений для этих случаев приводятся.

В ряде выполненных ранее решений задачи определения ветра по полю давления с учетом сил внутреннего трения и Кориолиса рассматривалась основная система уравнений горизонтального движения, без учета нелинейных членов ускорения [1—7] или с переносом их в правую часть и применением метода итераций [8].

В данной статье линеаризируется задача относительно геострофического ветра и находятся отклонения от решения в форме Экмана.

§ 1. Основные дифференциальные уравнения задачи

Систему дифференциальных уравнений горизонтального движения берем в форме

$$u_t + uu_x + vu_y - \nu\Delta u + lv = -Q_1 \equiv -\frac{p_x}{\rho},$$

$$v_t + uv_x + vv_y - \nu\Delta v - lu = -Q_2 \equiv -\frac{p_y}{\rho}, \qquad (1)$$

где u и v — компоненты скоростей в левой системе координат; ν — коэффициент виртуального трения,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $l = 2\omega \sin\varphi$ — параметр Кориолиса, p — атмосферное давление, ρ — плотность.

Положим

$$Q_1 = \overline{Q}_1 + Q_1' \quad \text{и} \quad Q_2 = \overline{Q}_2 + Q_2', \qquad (2)$$

где $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ значения Q_1 и Q_2 для рассматриваемой области, осредненные по пространству и времени. Q_1' и Q_2' — отклонения Q_1 и Q_2 от $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$.

Кроме того, положим

$$u = \overline{U}_g + u', \quad v = \overline{V}_g + v', \qquad (3)$$

где $\overline{U}_g$ и $\overline{V}_g$ — компоненты геострофического ветра, осредненные по пространству и времени.

При этом

$$-l\overline{u}_g = -\overline{Q}_1 \quad \text{и} \quad l\overline{v}_g = -\overline{Q}_2. \tag{4}$$

Подставляя в уравнение (1) выражения (2) и (3), используя (4) и отбрасывая члены, квадратичные относительно u' и v', придем к линейным уравнениям:

$$u'_t + \overline{U}_g u'_x + \overline{V}_g u'_y - \nu \Delta u' + lv' = -Q'_1,$$

$$v'_t + \overline{U}_g v'_x + \overline{V}_g v'_y - \nu \Delta v' - lu' = -Q^2_2. \tag{5}$$

Краевые условия примем $u = 0$, $v = 0$ при $z = 0$, следовательно, $u' = \overline{U}_g$, $v' = \overline{V}_g$. Подставляя в (5) выражения $u' = u - \overline{U}_g$ и $v' = v - \overline{V}_g$ и учитывая, что $l\overline{v}_g - Q'_1 = -Q_1$ и $-l\overline{u}_g - Q'_2 = -Q_2$, получим

$$u_t + \overline{U}_g u_x + \overline{V}_g u_y - \nu \Delta u + lv = -Q_1,$$

$$v_t + \overline{U}_g v_x + \overline{V}_g v_y - \nu \Delta v - lu = -Q_2. \tag{6}$$

Умножая второе уравнение на мнимую единицу и складывая с первым, обозначим

$$S = u + iv, \tag{7}$$

тогда получим уравнение

$$S_t + \overline{U}_g S_x + \overline{V}_g S_g - \nu \Delta S - ilS = -Q_1 - iQ_2. \tag{8}$$

Краевые условия для S: при $z = 0$, $S = 0$ и

$$z = \infty \; s = \overline{S}_g = \overline{U}_g + i\overline{V}_g. \tag{9}$$

Выполним замену зависимой переменной S с тем, чтобы получить для нее нулевые краевые условия, при $z = 0$ и $z = \infty$. Положим

$$S = \widetilde{S} + \overline{S}_g (1 - e^{-\alpha z}), \tag{10}$$

где α удовлетворяет условию $Rel\,\alpha > 0$.

Если

$$\alpha = (1 - i)\sqrt{\frac{l}{2\nu}}, \tag{11}$$

$\overline{S}_g (1 - e^{-\alpha z})$ принимает значение ветра, определяемое «спиралью Экмана». В этом случае $\widetilde{S}$ дает отклонение от ветра по Экману, определенному по среднему геострофическому ветру.

Подстановка (10) в (6) дает (так как $\overline{Q} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 = il\overline{S}_g$)

$$\overline{S}_t + \overline{U}_g \widetilde{S}_x + \overline{V}_g \widetilde{S}_y - \nu \Delta \widetilde{S} - il\widetilde{S} = -(Q_1 + iQ_2) -$$

$$- \nu\alpha^2 S_g e^{-\alpha z} + il\overline{S}_g (1 - e^{-\alpha z}) = -(Q'_1 + iQ'_2) - (\nu\alpha^2 + il)\widetilde{S}_g e^{-\alpha z}.$$

С учетом (11) получим $\left(\text{так как иначе } \alpha = \sqrt{\frac{-il}{\nu}} \text{ и } \nu\alpha^2 + il = 0\right)$

$$\widetilde{S}_t + \overline{U}_g \widetilde{S}_x + \overline{V}_g \widetilde{S}_y - \nu\Delta\widetilde{S} - il\widetilde{S} = -(Q'_1 + iQ'_2) \equiv -Q'. \tag{12}$$

При этом

$$\widetilde{S} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \text{ и при } z = \infty. \tag{13}$$

В правой части (12) Q' может быть выражено через отклонение геострофического ветра от среднего его значения:

$$Q' = ilS'_g, \text{ где } S'_g = S_g(x, y, z; t) - \overline{S}_g.$$

Таким образом, наша задача сведена к решению уравнения (12) с краевыми условиями (13) при a, определяемой по (11). Окончательное решение находится по формуле (10).

Из соображений самосопряженности уравнения (12) преобразуем, введя новую зависимую перемещенную S' по формуле

$$\widetilde{S} = S' e^{\frac{U_g x + V_g y}{2\nu}}. \tag{14}$$

Для S' получим уравнение

$$S'_t + K^2 S' - \nu \Delta S' = -Q' e^{-\frac{U_g x + V_g y}{2\nu}} \equiv -F, \tag{15}$$

где

$$K^2 = \frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu} - il. \tag{16}$$

Можем считать $\widetilde{S} = \widetilde{U} + i\,\widetilde{v}$, а

$$S'_g = U'_g + V'_g. \tag{17}$$

§ 2. Стационарный случай

В уравнении (12) в этом случае $S_t = 0$ так же как и в уравнении (15) $S'_t = 0$. Сообразно с этим мы обязаны считать Q' независящим от времени t. Итак, рассмотрим уравнение

$$K^2 S' - \nu \Delta S' = -F, \tag{18}$$

где F — определено соотношением (15), а K^2 — соотношением (16).

Перепишем (18):

$$\Delta S' - \frac{K^2}{\nu} S' = \frac{F}{\nu} \quad \text{или} \quad \Delta S' - M^2 S' = \Phi, \tag{19}$$

где

$$M^2 = \frac{K^2}{\nu} = \frac{\widetilde{U}_g^2 + \widetilde{V}_g^2}{4\nu^2} - \frac{il}{\nu}, \tag{20}$$

$$\Phi = \frac{F}{\nu} = \frac{Q'}{\nu} e^{-\frac{\widetilde{U}_g x + \widetilde{V}_g y}{2\nu}}. \tag{21}$$

Уравнение Гельмгольца (19) имеет решение для полупространства:

$$S' = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} \Phi(x', y', z') \left[\frac{e^{-MR}}{R} - \frac{e^{-MR_1}}{R_1} \right] dz'\, dx'\, dy', \tag{22}$$

$$R^2 = (x^1 - x)^2 + (y^1 - y)^2 + (z^1 - z)^2,$$

$$R_1^2 = (x^1 - x)^2 + (y^1 - y)^2 + (z^1 + z)^2. \tag{23}$$

Выписанное решение при $z = 0$ удовлетворяет условиям

$$S' = \widetilde{S} = \widetilde{U} = \widetilde{V} = 0.$$

Согласно (20)

$$M = \sqrt{\frac{\overline{U}_g^2 + V_g^2}{4\nu^2} - il} = A - iB, \tag{24}$$

где

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\widetilde{U}_g^2 + \widetilde{V}_g^2}{4\nu}\right)^2 + \left(\frac{l}{\nu}\right)^2} + \frac{\overline{U}_g^2 + \overline{v}_g^2}{4\nu^2}\right\}},$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\widetilde{U}_g^2 + \widetilde{V}_g^2}{4\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{l}{\nu}\right)^2} - \frac{\widetilde{U}_g^2 + \widetilde{V}_g^2}{4\nu^2}\right\}}. \tag{25}$$

Используя (23) и (8) в решении (22), получим

$$S' = -\frac{1}{4\pi}\int_{-}^{+}\int_{\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left[\Phi_1\left(\frac{e^{-AR}\cos BR}{R} - \frac{e^{-AR_1}\cos BR_1}{R_1}\right) - \right.$$

$$\left. - \Phi_2\left(\frac{e^{-AR}\sin BR}{R} - \frac{e^{-AR_1}\sin BR_1}{R_1}\right)\right] dz'\,dx'\,dy' +$$

$$+ i\left[\int_{-}^{+}\int_{\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left[\Phi_2\left(\frac{e^{-AR}\cos BR}{R} - \frac{e^{-AR_1}\cos BR_1}{R_1}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \Phi_1\left(\frac{e^{-AR}\sin BR}{R} - \frac{e^{-AR_1}\sin BR_1}{R_1}\right)\right] dz'\,dx'\,dy' \tag{26}$$

и далее найдем u и v по (10) и (14) согласно (7).

Согласно (21) и (12) обозначено:

$$\Phi_1 = \frac{Q_1'}{\nu} e^{-\frac{\overline{U}_g x + \overline{V}_g y}{2\nu}}, \quad \Phi_2 = \frac{Q_2'}{\nu} e^{-\frac{\overline{U}_g x + \overline{V}_g y}{2\nu}}.$$

Окончательно для $\widetilde{U}$ и $\widetilde{V}$ получаем следующие выражения:

$$\widetilde{U} = -\frac{1}{4\pi\nu}\int_{-}^{+}\int_{\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x)\overline{U}_g + (y'-y)\overline{V}_g}{2\nu}}\left[Q_1'\left(\frac{e^{-AR}\cos BR}{R} - \frac{e^{-AR}\cos BR_1}{R_1}\right) - \right.$$

$$\left. - Q_2'\left(\frac{e^{-AR}\sin BR}{R} - \frac{e^{-AR_1}\sin BR_1}{R_1}\right)\right] dz'\,dx'\,dy', \tag{27}$$

$$\widetilde{V} = -\frac{1}{4\pi\nu}\int_{-}^{+}\int_{\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x)\widetilde{U}_g + (y'-y)\overline{V}_g}{2\nu}}\left[Q_2'\left(\frac{e^{-AR}\cos BR}{R} - \frac{e^{-AR_1}\cos BR_1}{R_1}\right) + \right.$$

$$\left. + Q_1'\left(\frac{e^{-AR}\sin BR}{R} - \frac{e^{-AR}\sin BR_1}{R_1}\right)\right] dz'\,dx'\,dy'. \tag{28}$$

Величины A и B согласно (25) можно записать так:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{4l\nu}{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}\right)^2} + 1\right]},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4l\nu}{\overline{U}_g^2 + V_g^2} \right)^2} - 1 \right]}.$$

За исключением случая, когда $\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2 \approx 0$, величина $\frac{4l\nu}{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2} \ll 1$, почему приближенно:

$$A \approx \frac{\sqrt{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}}{2\nu} = \frac{C_g}{2\nu}, \tag{29}$$

$$B \approx \frac{l}{\sqrt{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}} = \frac{l}{C_g},$$

так как при этом B мало, то приближенно, согласно (27) и (28), запишем

$$\widetilde{U} = -\frac{1}{4\pi\nu} \int_{-}^{+} \int_{\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x)\overline{U}_g + (y'-y)\overline{V}_g}{2\nu}} Q_1' \left(\frac{e^{-AR}}{R} - \frac{e^{-AR_1}}{R_1} \right) dz'\, dx'\, dy',$$

$$\widetilde{V} \approx -\frac{1}{4\pi\nu} \int_{-}^{+} \int_{\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x)\overline{U}_g + (y'-y)\overline{V}_g}{2\nu}} Q_2' \left(\frac{e^{-AR}}{R} - \frac{e^{-AR_1}}{R_1} \right) dz'\, dx'\, dy'.$$

Окончательный вид решения для U и V определится исходя из формулы (10), в которой S, $\widetilde{S}$, $\overline{S}_g$ являются комплексными величинами (7), (17) и (9) и где α дано выражением (11).

§ 3. Периодический ветровой режим

Периодическое решение для S, а следовательно, и для S' будем искать для уравнения (15) в форме

$$S' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n' e^{in\omega t}. \tag{30}$$

Установившийся ветровой режим, определяемый из уравнения (15), очевидно, возможен лишь при периодичности Q, т. е. при

$$Q' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n' e^{in\omega t}. \tag{31}$$

Здесь $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (где T известный период), а

$$Q_n' = \frac{1}{T} \int_0^T Q' e^{-in\omega t}\, dt.$$

Подстановка (30) и (31) в уравнение (5) для S_n' дает

$$\Delta S_n' - M_n^2 S_n' = \Phi_n, \tag{32}$$

где

$$M_n^2 = \frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu^2} + i\,\frac{n\omega - l}{\nu},$$

$$\Phi_n = \frac{F_n}{\nu} = \frac{Q_n'}{\nu} e^{-\frac{x\overline{U}_g + y\overline{V}_g}{2\nu}}.$$

Решение уравнения (32) аналогично (19):

$$S_n' = -\frac{1}{4\pi\nu} \int\limits_{-}^{+} \int\limits_{\infty}^{\infty} \int\limits_{\infty}^{\infty} \Phi_n(x', y', z') \left[\frac{e^{-M_n R}}{R} - \frac{e^{-M_n R_1}}{R_1} \right] dz'\, dx'\, dy',$$

R и R_1 определены по (23),

$$M_n = \sqrt{\frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu^2} + i\,\frac{n\omega - l}{\nu}}.$$

При этом $M_n = A_n - iB$, где

$$A_n = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{ \sqrt{\left(\frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{n\omega - l}{\nu}\right)^2} + \frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu^2} \right\}},$$

$$B_n = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{ \sqrt{\left(\frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{n\omega - l}{\nu}\right)^2} - \frac{\overline{U}_g^2 + \overline{V}_g^2}{4\nu^2} \right\}}.$$

Анализ функций влияния и приближенных решений аналогичен тому, что был выполнен в § 2 для стационарного случая.

Так как $S_n' = U_n' + iV_n'$, то аналогично выкладкам предыдущего параграфа найдем

$$U_n' = -\frac{1}{4\pi\nu} \int\limits_{-}^{+} \int\limits_{\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{\overline{U}_g(x'-k) + \overline{V}_g(y'-y)}{2\nu}} \left[Q_{1n}' \left(\frac{e^{-A_n R} \cos B_n R}{R} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{e^{-A_n R_1} \cos B_n R_1}{R_1} \right) - Q_{2n}' \left(\frac{e^{-A_n R} \sin B_n R}{R} - \frac{e^{-A_n R_1} \sin B_n R_1}{R_1} \right) \right] dz'\, dx'\, dy'. \quad (33)$$

$$V_n' = -\frac{1}{4\pi\nu} \int\limits_{-}^{+} \int\limits_{\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{\widetilde{U}_g(x'-x) + \widetilde{V}_g(y'-y)}{2\nu}} \left[Q_{2n}' \left(\frac{e^{-A_n R} \mathrm{cos}\, B_n R}{R} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{e^{-A_n R_1} \cos B_n R_1}{R_1} \right) \right] + Q_{1n}' \left(\frac{e^{-A_n R} \sin B_n R}{R} - \frac{e^{-A_n R_1} \sin B_n R_1}{R_1} \right) \Bigg] dz'\, dx'\, dy'. \quad (34)$$

Используя (7), (14) и (30), найдем $\widetilde{U}$ и $\widetilde{V}$. Выражение для A_n, B_n могут быть получены аналогично (29) при малых $\overline{n}$.

С этой оговоркой может быть проведен анализ формул (33) и (34) тем же способом, что и в § 2.

§ 4. Нестационарная задача

Будем исходить из уравнения (15):

$$S_t' + K^2 S' - \nu \Delta S' = -F, \quad (35)$$

где

$$F = Q' e^{-\frac{\overline{U}_g x + \widetilde{V}_g y}{2\nu}}, \quad K^2 = \frac{\widetilde{U}_g^2 + \widetilde{V}_g^2}{4\nu} - il.$$

Введем новую искомую функцию по формуле

$$S' = S'' e^{-K^2 t}.$$

Тогда (35) превращается для S'' в уравнение

$$S''_t - \nu \Delta S'' = -\overline{F},$$

где

$$\overline{F} = -Q' e^{-\frac{x\widetilde{U}_g + y\widetilde{V}_g}{2\nu} + \left(\frac{\widetilde{U}_g^2 + \widetilde{V}_g^2}{4\nu} - il\right)t}, \tag{36}$$

и

$$S'' = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} S^{0''}(x', y', z') \left[e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} - e^{-\frac{R_1^2}{4\nu t}}\right] dz' dx' dy' +$$

$$+ \frac{1}{(4\pi\nu)^{3/2}} \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{\overline{F}(x', y', z'; t')}{(t-t')^{3/2}} \left[e^{-\frac{R^2}{4\nu(t-t')}} - e^{-\frac{R_1^2}{4\nu(t-t')}}\right] dz' dx' dy' dz', \tag{37}$$

где

$$R^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

$$R_1^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' + z)^2;$$

при этом

$$\widetilde{S}' = S'' e^{\frac{xU_g + yV_g}{2\nu} + \left(il - \frac{\widetilde{U}_g^2 + \widetilde{V}_g^2}{4\nu}\right)t}, \tag{38}$$

а (37) удовлетворяет условию $S = 0$ при $z = 0$.

За счет (38) решение для S отличается от обычного решения уравнения теплопроводности. Значение $\overline{F}$ дается правой частью (36), S — определяется выражением (10) с учетом (36), (37) и (38).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюбюк А. Ф. «Метеорология и гидрология», № 3, 1949.
2. Дюбюк А. Ф. «Тр. Центр. ин-та прогнозов», вып. 15 (42), 1949.
3. Дюбюк А. Ф. «Тр. Центр. ин-та прогнозов», вып. 15 (42), 1949.
4. Дюбюк А. Ф. «Тр. Центр. ин-та прогнозов», вып. 15 (42), 1949.
5. Дюбюк А. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мех., мат., астрон. физ., химии, № 4 1957.
6. Дюбюк А. Ф. «Изв. АН СССР», сер. геофизич., № 2, 1958.
7. Дюбюк А. Ф., Сезнева Т. В. «Метеорология и гидрология», № 7, 1962.
8. Дюбюк А. Ф. «Тр. Ленингр. гидрометеор. ин-та», вып. 5—6, 1956.

Поступила в редакцию
10.5 1967 г.

Кафедра
физики атмосферы