Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1968

УДК 539.12.01

В. С. ТУМАНОВ

К ТЕОРИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША—ГОРДАНА ГРУППЫ U (3)

Рассматривается методика вычисления изоскалярных факторов группы U (3) с помощью рекуррентных формул. Получены формулы изоскалярных факторов для произведения $[f00] \times [g00]$ и для старших подмультиплетов в случае произведения $[f00] \times [00—g]$. На частном примере разложения произведения $[20—2] \times [20—2]$ рассмотрен числовой расчет с учетом дополнительных условий симметрии.

В последнее время появилось большое число публикаций, посвященных теории коэффициентов Клебша—Гордана унитарной группы (см. ссылки в статье [3], а также [2—8]). При повышении ранга группы сложность расчетов резко возрастает. Если формула Вигнера для обычных коэффициентов Клебша—Гордана (группа U (2) или SU (2)) содержит однократную сумму, то для U (3) только для частного случая (одно из перемножаемых представлений симметрично) соответствующая сумма является шестикратной [9]. В связи с этим возникает задача отыскания более эффективных методов расчета, чем в значительной мере объясняется большое число работ в этой области, появившихся уже после того, как были рассчитаны некоторые частные случаи [1].

В настоящей работе излагается методика расчета изоскалярных факторов группы U (3) на основе полной системы рекуррентных соотношений, полученной в [3]. Отметим, что два (из четырех возможных) реккурентных соотношения для коэффициентов Клебша—Гордана группы U (3) были приведены в [2], однако соотношения для изосклярных факторов в этой статье не были получены.

В § 1 и 2 рассчитываются формулы для вариантов $[f00]\times[g00]$ и $[f00]\times[00—g]$. Эти формулы могут представить самостоятельный интерес, несмотря на существование упоминавшейся выше более общей формулы Мошинского [9], поскольку она вряд ли удобна для анализа частных случаев. Метод, основанный на реккурентных соотношениях, является, с нашей точки зрения, наиболее простым при числовых расчетах. В качестве примера в § 3 дается расчет для варианта 27×27, более сложного, чем варианты, приведенные в таблицах Сварта [1]. Обозначения статьи соответствуют обозначениям работы [3].

§ 1. Произведение $[f00] \times [g00]$

В качестве первого примера применения общих формул рассмотрим произведение полностью симметричных представлений $[f00] \times [g00]$, равное, как нетрудно заметить при рассмотрении соответствующих схем Юнга,

$\sum_k [f+g-k,\ k,\ 0]$, где при $f \geqslant g$ суммирование ведется от 0 до g, а при $f \leqslant g$ — от 0 до f. Поскольку $f_2 = f_3 = g_2 = g_3 = h_3 = l_2 = m_2 = 0$, из формул (4) [3] следует, что для старшего подмультиплета ($n_1 = h_1$, $n_2 = h_2$) отличен от нуля только один изоскалярный фактор $[f0,\ g0,\ h_1h_2] = 1$. Для нахождения остальных изоскалярных факторов надо решить систему

$$\begin{aligned}(h_1 - n_2 + 2)^{1/2}(h_2 - n_2 + 1)^{1/2}[l_1\,0,\ m_1 0,\ n_1 n_2 - 1] = \\ = -(n_1 - l_1)^{1/2}(f - l_1)^{1/2}[l_1 + 1\,0,\ m_1 0,\ n_1 n_2] + \\ + (n_1 - m_1)^{1/2}(g - m_1)^{1/2}[l_1 0,\ m_1 + 1\,0,\ n_1 n_2];\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(h_1 - n_1 + 1)^{1/2}(n_1 - h_2)^{1/2}[l_1 0,\ m_1 0,\ n_1 - 1 n_2] = \\ = (n_1 - m_1)^{1/2}(f - l_1)^{1/2}[l_1 + 1\,0,\ m_1 0,\ n_1 n_2] + \\ + (n_1 - l_1)^{1/2}(g - m_1)^{1/2}[l_1 0,\ m_1 + 1\,0,\ n_1 n_2].\end{aligned} \tag{2}$$

Рассматривая последовательно решения системы (1) при $n_1 = h_1$, $n_2 = h_2$, $h_2 - 1, \ldots$, можно заметить закономерность

$$\begin{aligned}[f - k0,\ g - n0,\ h_1h_2 - (k+n)] = (-1)^k \varphi(k, n) \times \\ \times \left[\frac{k!\,n!\,(h_1 - f + k)!\,(h_1 - g + n)!\,(h_1 - h_2 + 1)!}{(k+n)!\,(h_1 - f)!\,(h_1 - g)!\,(h_1 - h_2 + 1 + k + n)!}\right]^{1/2},\end{aligned}$$

для $\varphi(k, n)$ получаем уравнение $\varphi(k, n) = \varphi(k-1, n) + \varphi(k, n-1)$, имеющее при начальном условии $\varphi(1, 0) = \varphi(0, 1) = 1$ решение $\varphi(k, n) = (k+n)!/k!n!$ Выделяя множитель, зависящий от l_1, m_1, имеем

$$\begin{aligned}[l_1 0,\ m_1 0,\ h_1 n_2] = D(-1)^{f-l_1}\left[\frac{(h_1 - l_1)!\,(h_1 - m_1)!}{(f - l_1)!\,(g - m_1)!}\right]^{1/2}, \\ D = \left[\frac{(h_2 - n_2)!\,(h_1 - h_2 + 1)!}{(h_1 - f)!\,(h_1 - g)!\,(h_1 - n_2 + 1)!}\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Затем решается уравнение (2) с начальным условием (3). Замена

$$\begin{aligned}[l_1 0,\ m_1 0,\ h_1 - kn_2] = D(-1)^{f-l_1}\chi(k, l_1, m_1) \times \\ \times \left[\frac{(h_1 - l_1 - k)!\,(h_1 - m_1 - k)!\,(h_1 - h_2 - k)!}{(f - l_1)!\,(g - m_1)!\,k!\,(h_1 - h_2)!}\right]^{1/2}\end{aligned}$$

упрощает это уравнение:

$$\begin{aligned}\chi(k, l_1, m_1) = -(h_1 - m_1 - k + 1)(f - l_1)\chi(k-1, l_1 + 1, m_1) + \\ + (h_1 - l_1 - k + 1)(g - m_1)\chi(k-1, l_1, m_1 + 1), \\ \chi(0, l_1, m_1) = 1.\end{aligned} \tag{4}$$

Рассматривая частные решения для $k = 1, 2, 3$, можно заметить общую закономерность:

$$\begin{aligned}\chi(k, l_1, m_1) = \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \frac{k!\,(g - m_1)!}{s!\,(k-s)!\,(g - m_1 - k + s)!} \times \\ \times \frac{(h_1 - l_1 - s)!\,(f - l_1)!\,(h_1 - m_1 - k + s)!}{(h_1 - l_1 - k)!\,(f - l_1 - s)!\,(h_1 - m_1 - k)!}.\end{aligned} \tag{5}$$

Для проверки общей формулы (5) во второй сумме правой части равенства (4) надо сдвинуть на единицу индекс суммирования, после чего

тождественность левой и правой частей при $0 < s < k$ становится очевидной, слагаемые с $s = 0$ и $s = k$ рассматриваются отдельно. В итоге получаем

$$\begin{bmatrix} f00 & g00 & h_1h_20 \\ l_10 & m_10 & n_1n_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{f-l_1} \left[\frac{(h_1-h_2+1)(h_2-n_2)!\,(h_1-n_1)!\,(n_1-h_2)!\,(f-l_1)!\,(g-m_1)!}{(h_1-f)!\,(h_1-g)!\,(h_1-n_2+1)!\,(n_1-l_1)!\,(n_1-m_1)!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{h_1-n_1} (-1)^s \frac{(h_1-l_1-s)!\,(n_1-m_1+s)!}{s!\,(h_1-n_1-s)!\,(g-m_1-h_1+n_1+s)!\,(f-l_1-s)!}. \qquad (6)$$

Слагаемые, имеющие в знаменателе факториал отрицательного числа, обращаются в нуль, поэтому пределы суммирования в (5), (6) являются лишь максимально возможными, и ряд может содержать меньшее число слагаемых. Аналогичным образом обращаются в нуль изоскалярные факторы для $l_1 > n_1$ и $m_1 > n_1$.

Выражение (6) можно переписать в другом виде, заменяя индекс суммирования $s' = h_1 - n_1 - s$. Сравнивая новую и старую формулы, получаем равенство

$$\begin{bmatrix} g00 & f00 & h_1h_20 \\ m_10 & l_10 & n_1n_2 \end{bmatrix} = (-1)^{g-m_1-f+l_1-h_1+n_1} \begin{bmatrix} f00 & g00 & h_1h_20 \\ l_10 & m_10 & n_1n_2 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

которое соответствует условию симметрии (14.3) работы [1]. Поскольку

$$(-1)^{-m_1+l_1+n_1} = (-1)^{I_1+I_2-I}, \quad (-1)^{g-f-h_1} = (-1)^{h_2},$$

из формулы (7) при нашем выборе фазовых множителей следует значение $\xi_1 = (-1)^{h_2}$.

§ 2. Произведение $[f00] \times [00-g]$

Рассматривая схемы Юнга для произведения $[gg0] \times [f00]$ и сдвигая затем все числа h_i на величину g, находим разложение

$$[f00] \times [00-g] = \sum_k [f-k,\ 0,\ k-g]$$

(суммирование от 0 до f при $f \leqslant g$ и до g при $f \geqslant g$).

Ограничимся в этом случае выводом общей формулы для изоскалярных факторов старшего подмультиплета, остальные изоскалярные факторы можно получить из соотношений

$$(h_1-n_2+2)^{1/2}(n_2-h_3)^{1/2}[l_10,\ 0m_2,\ n_1n_2-1] =$$

$$= -(l_1-n_1+1)^{1/2}(f-l_1)^{1/2}[l_1+1\,0,\ 0m_2,\ n_1n_2] +$$

$$+ (n_1-m_2+1)^{1/2}(g+m_2+1)^{1/2}[l_10,\ 0m_2+1,\ n_1n_2],$$

$$(h_1-n_1+1)^{1/2}(n_1-h_3+1)^{1/2}[l_10,\ 0m_2,\ n_1-1n_2] =$$

$$= (l_1-n_2+2)^{1/2}(f-l_1)^{1/2}[l_1+1\,0,\ 0m_2,\ n_1n_2] -$$

$$-(n_2-m_2)^{1/2}(g+m_2+1)^{1/2}[l_1\,0,\ 0m_2+1,\ n_1n_2].$$

Левая часть уравнения (10) [3] тождественно обращается в нуль, для

определения изоскалярных факторов старшего подмультиплета используется уравнение (11) [3]:

$$(l_1+1)^{1/2}(f-l_1+1)^{1/2}[l_1-10,\ 0m_2,\ h_10]-$$
$$-(1-m_2)^{1/2}(g+m_2)^{1/2}[l_10,\ 0m_2-1,\ h_10]=0. \qquad (8)$$

Последовательное применение равенств (8) приводит к соотношению

$$[f-k0,\ 0h_1-f+k,\ h_10]=$$
$$=\left[\frac{(f-h_1)!\,(h_1-f+g+k)!\,(f-k+1)!}{(f-h_1-k)!\,(h_1-f+g)!\,(f+1)!\,k!}\right]^{1/2}[f0,\ 0h_1-f,\ h_10],$$

причем последовательность обрывается при $f-k<h_1$. Используя условие нормировки, находим

$$[f-k0,\ 0h_1-f+k,\ h_10]=\left[\frac{(h_1-f+g+k)!\,(f-k+1)!}{(f-h_1-k)!\,k!}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\left[\sum_{s=0}^{f-h_1}\frac{(h_1-f+g+s)!\,(f-s+1)!}{(f-h_1-s)!\,s!}\right]^{-1/2}.$$

§ 3. Вычисление изоскалярных факторов для случая кратных представлений

В заключение приведем пример числового расчета изоскалярных факторов для непроводимых представлений, входящих в произведение с кратностью, большей единицы. Для однозначного определения необходимы дополнительные условия, в качестве которых в данном случае выбираются условия симметрии изоскалярных факторов при перестановке сомножителей и переходе к сопряженным представлениям (см. формулы (14.3) и (14.13) работы Сварта [1]). Условия (14.9) из [1] мы не используем, поскольку оно для случая кратности, большей единицы, было введено в упомянутой статье в качестве предположения.

Рассмотрим произведение [20—2]×[20—2](27×27) и вычислим изоскалярные факторы старших подмультиплетов для октета [10—1], входящего дважды в это произведение, и представления [20—2], входящего трижды.

Для первого случая ([10—1]) введем обозначения

$$x_1=[20,0-1,10],\ x_2=[20,1-2,10],\ x_3=[10,\ 00,\ 10],\ x_4=[10,1-1,10],$$
$$x_5=[10,2-2,10],\quad x_6=[00,2-1,10],\quad x_7=[2-1,1-1,10],$$
$$x_8=[2-1,2-2,10],\quad \tilde{x}_1=[0-1,\ 20,\ 10],\ \ldots,\ \tilde{x}_8=[2-2,2-1,10].$$

Уравнения (10, 11) [3] приводятся к следующему виду:

$$2x_1+\sqrt{5}\,x_2-\sqrt{5}\,x_4+2x_7=0,\quad 4x_1-\sqrt{5}\,x_2+2\sqrt{5}\,x_4+2x_7=0,$$
$$2x_1-\sqrt{5}\,x_3=0,\quad \sqrt{5}\,x_4+2\tilde{x}_7=0,\quad x_5=\tilde{x}_5=x_6=\tilde{x}_6=0,$$
$$x_7-\tilde{x}_7+x_8+\tilde{x}_8=0\quad 5(x_7+\tilde{x}_7)-3(x_8-\tilde{x}_8)=0,$$
$$x_3-\tilde{x}_3+x_4+\tilde{x}_4=0,\quad 3(x_3+\tilde{x}_3)-(x_4-\tilde{x}_4)=0.$$

Добавляя условие симметрии при перестановке сомножителей (формула (14.3) [1])

$$\tilde{x}_i = -\xi_1 x_i \ (i = 1, 4, 8); \quad \tilde{x}_i = \xi_1 x_i \ (i = 2, 3, 7)$$

и условие нормировки, получаем систему уравнений, однозначно определяющую изоскалярные факторы:

$$x_1 = \frac{\sqrt{14}}{42}, \ x_2 = \frac{\sqrt{70}}{21}, \ x_3 = \frac{\sqrt{70}}{105}, \ x_4 = \frac{\sqrt{70}}{35},$$

$$x_7 = \frac{-\sqrt{14}}{14}, \ x_8 = \frac{-5\sqrt{14}}{42} \quad (\xi_1 = 1),$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{30}}{18}, \ x_2 = \frac{-\sqrt{6}}{9}, \ x_3 = \frac{\sqrt{6}}{9}, \ x_4 = \frac{-\sqrt{6}}{9},$$

$$x_7 = \frac{-\sqrt{30}}{18}, \ x_8 = \frac{\sqrt{30}}{18} \quad (\xi_1 = -1).$$

Векторы, соответствующие $\xi_1 = 1$ и $\xi_1 = -1$, ортогональны друг другу. Для второго случая ([20 — 2]) введем обозначения

$$y_1 = [20, 00, 20], \ y_2 = [20, 1-1, 20], \ y_3 = [20, 2-2, 20], \ y_4 = [10, 2-1, 20],$$

$$\tilde{y}_1 = [00, 20, 20], \ \ldots, \tilde{y}_4 = [2-1, 10, 20],$$

$$y_5 = [10, 10, 20], \quad y_6 = [2-1, 2-1, 20],$$

в которых уравнения (10, 11) [3] имеют вид:

$$\begin{aligned} &2\sqrt{6}\, y_1 + 4y_2 + 4\tilde{y}_4 - \sqrt{5}\, y_5 = 0, \quad y_2 + \sqrt{3}\, y_3 - 2y_4 + \sqrt{2}\, y_6 = 0, \\ &2\sqrt{6}\, y_1 - 2y_2 + \tilde{y}_4 + 2\sqrt{5}\, y_5 = 0, \quad 5y_2 - \sqrt{3}\, y_3 + 5y_4 + 2\sqrt{2}\, y_6 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Как и в предыдущем случае, используем условие симметрии

$$\tilde{y}_i = \xi_1 y_i \ (i = 1, 3, 5, 6), \quad \tilde{y}_i = -\xi_1 y_i \ (i = 2, 4).$$

Если $\xi_1 = -1$, то $y_5 = y_6 = 0$, и уравнения (9) вместе с условиями нормировки однозначно определяют y_i:

$$y_1 = \frac{\sqrt{42}}{42}, \ y_2 = \frac{\sqrt{7}}{14}, \ y_3 = \frac{-5\sqrt{21}}{42}, \ y_4 = \frac{-\sqrt{7}}{7}, \ y_5 = 0, \ y_6 = 0.$$

$$(\xi_1 = -1).$$

Случаю $\xi_1 = 1$ соответствуют два решения, для определения которых воспользуемся условием симметрии при сопряжении (14.13) [1]:

$$[0-2, 00, 0-2] = \xi_3 [20, 00, 20] = \xi_3 y_1. \tag{10}$$

Последовательным применением формул (5, 6) [3] можно получить соотношение

$$[0-2, 00, 0-2] = y_1 + \frac{10}{3}\tilde{y}_1 + \frac{5\sqrt{6}}{6}\tilde{y}_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\tilde{y}_3 + \frac{\sqrt{6}}{3}\tilde{y}_4 + \frac{2\sqrt{30}}{3}\, y_5.$$

Выражая $\tilde{y}_3$, $\tilde{y}_4$, y_5 через y_1 и y_2, с помощью формул (9) находим $[0, -2, 00, 0-2] = y_1$ или $\xi_3 y_1 = y_1$. При $\xi_3 = -1$ $y_1 = 0$, и из (9) получаем

$$y_1 = 0, \ y_2 = \frac{\sqrt{5}}{8}, \ y_3 = \frac{\sqrt{15}}{8}, \ y_4 = \frac{\sqrt{5}}{12}, \ y_5 = \frac{1}{6}, \ y_6 = -\frac{\sqrt{10}}{6}$$

$$(\xi_1 = 1, \quad \xi_3 = -1).$$

При $\xi_3 = 1$ равенство (10) не дает дополнительной информации, но здесь можно использовать условие ортогональности векторов с $\xi_3 = -1$ и $\xi_3 = 1$:

$$2\,(y_1y_2' + y_2y_2' + y_3y_3' + y_4y_4') + y_5y_5' + y_6y_6' = 0,$$

после чего изоскалярные факторы определяются однозначно:

$$y_1' = \frac{\sqrt{42}}{21},\ y_2' = \frac{-\sqrt{7}}{8},\ y_3' = \frac{11\sqrt{21}}{168},\ y_4' = \frac{3\sqrt{7}}{28};$$

$$y_5' = \frac{-\sqrt{35}}{14},\ y_6' = \frac{\sqrt{14}}{14},\quad (\xi_1 = 1,\ \xi_3 = 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. De Swart J. J. Rev. Mod. Phys., **35**, 916, 1963.
2. Hecht K. T. Nucl. Phys., **62**, 1, 1965.
3. Туманов В. С. «Ядерная физика», **6**, 426, 1967.
4. Carter J. C., Coyne J. J., Meshkov S. Phys. Rev. Lett., **14**, 523, 1965.
5. Schülke L. Zeits. f. Phys., **183**, **424**, 1965.
6. Ponzano G. Nuovo Cim., **A 41**, 142, 1966.
7. Sharp R. T., Bayer H. J. Math. Phys., **7**, 1105, 1966.
8. Шелепин Л. А., Карасев В. П. «Ядерная физика», **5**, 221, 1967.
9. Moshinsky M. Rev. Mod. Phys., **34**, 813, 1962.

Поступила в редакцию
8.9 1967 г.

Кафедра
радиотехники