Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1968

УДК 521.6

В. Н. КИРЮШЕНКОВ

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В обобщенной задаче двух неподвижных центров получены ряды для r, z и w по степеням малых величин ε, σ, e и s с точностью до пятой степени включительно.

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс так, чтобы ось Oz проходила через неподвижные центры. В выбранной системе координат дифференциальные уравнения движения материальной точки в обобщенной задаче двух неподвижных центров запишутся следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$W = \frac{fm}{2}\left\{\frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2}\right\},$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2,$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2.$$

Здесь f — постоянная гравитации, $i=\sqrt{-1}$, а m, c и σ — некоторые постоянные, которые характеризуют систему неподвижных центров. (Более подробно познакомиться с обобщенной задачей двух неподвижных центров можно в работах Е. П. Аксенова, Е. А. Гребенникова, В. Г. Демина; см., например, [1].)

Решение системы дифференциальных уравнений (1) дается в работе [2].

В этом решении прямоугольные координаты связаны со временем при помощи набора формул и трансцендентных уравнений следующим образом:

$$x = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cdot \cos w,$$

$$y = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cdot \sin w,$$

$$z = c\sigma + \xi\eta,$$

$$\xi = a\,\frac{1 - e\bar{e} + (\bar{e} - e)\cos\psi}{1 + \bar{e}\cos\psi},$$

$$\eta = \frac{s\sin\varphi + \gamma}{1 + d\sin\varphi},$$

$$w = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - s^2}\,\sin\varphi + \beta}{\cos\varphi}\right) + \Omega + \mu\psi + \mu_1\sin\psi +$$

$$+ \mu_2\sin 2\psi + \mu_3\sin 3\psi + \mu_4\sin 4\psi + \bar{\mu}_1\cdot\cos\zeta + \bar{\mu}_2\sin 2\zeta,$$

$$\varphi = \zeta - \frac{k_2^2}{8}\left(1 + \nu + \frac{k_2^2}{2}\right)\sin 2\psi + \frac{3}{256}k_2^4\sin 4\psi +$$

$$+ \frac{k_1^2}{8}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\right)\sin 2\zeta + \frac{k_1^4}{256}\sin 4\zeta - \frac{k_1^2k_2^2}{32}\sin 2\psi\cos 2\zeta,$$

$$\zeta = (1 + \nu)\psi + \omega,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{2}$$

$$E - e^*\sin E = M + \lambda\psi - \lambda_1\sin\psi - \lambda_2\sin 2\psi -$$

$$- \bar{\lambda}_1\cos\zeta - \bar{\lambda}_2\sin 2\zeta - \bar{\lambda}_3\cos 3\zeta - \bar{\lambda}_4\sin 4\zeta - \bar{\lambda}_{22}\sin 2\psi\cos 2\zeta,$$

$$M = n_0(t - t_0) + M_0.$$

Здесь a, e, $s = \sin i$, ω, Ω, M_0 — постоянные интегрирования, а величины $\bar{e}$, γ, d, ... выражаются в виде рядов по степеням $\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)}$ и σ (предполагается, что $|\varepsilon|$ и $|\sigma|$ — достаточно малые величины). Эти ряды с точностью до пятой степени относительно малых величин включительно приводятся в формуле (3):

$$\bar{e} = e\{1 + \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - 2s^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)[(3 - 16s^2 + 14s^4) - 2e^2(1 - s^2)^2]\},$$

$$d = \varepsilon\sigma s\{1 - \varepsilon^2[(5 - 6s^2) - e^2(1 - 2s^2)]\}, \tag{3}$$

$$\gamma = -\varepsilon\sigma\{1 - 2s^2 - \varepsilon^2[(3 - 12s^2 + 10s^4) + e^2(1 - 2s^4)]\},$$

$$\beta = 2\varepsilon\sigma s(1 - s^2)^{1/2}\{1 - \varepsilon^2(4 - 5s^2 + e^2s^2)\},$$

$$\mu = -\frac{3}{2}(1 - s^2)^{1/2}\left\{\varepsilon^2(1 + \sigma^2) + \frac{\varepsilon^4}{8}(6 - 17s^2 - 24e^2s^2)\right\},$$

$$\mu_1 = -2\varepsilon^2 e\cos i\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{8}[(4 - 28s^2) - e^2(6 + 7s^2)]\right\},$$

$$\mu_2 = -\frac{\varepsilon^2}{4}e^2\cos i\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}[(22 + s^2) + e^2(2 + s^2)]\right\},$$

$$\mu_3 = \frac{\varepsilon^4}{4}e^3\cos i(2 - s^2),$$

$$\mu_4 = \frac{\varepsilon^4}{64}e^4\cos i(2 + s^2),$$

$$\bar{\mu}_1 = \varepsilon^3\sigma s(1 - e^2)\cos i,$$

$$\bar{\mu}_2 = \frac{\varepsilon^4}{32}s^2(1 - e^2)\cos i,$$

$$e^* = e\{1 - \varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2) + \varepsilon^4 s^2 (1-s^2)(1-e^2)(3+e^2)\},$$

$$\lambda = -\frac{\varepsilon^4}{16}(1-e^2)^{3/2}(24 - 96s^2 + 75s^4),$$

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s(4-5s^2)(1-e^2)^{3/2},$$

$$\bar{\lambda}_2 = -\frac{\varepsilon^2}{4}s^2(1-e^2)^{3/2}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}[(12-13s^2) - e^2(4-5s^2)]\right\},$$

$$\lambda_1 = -\frac{\varepsilon^4}{4}s^2 e(4-5s^2)(1-e^2)^{3/2},$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{32}\varepsilon^4 s^4 e^2(1-e^2)^{3/2},$$

$$\bar{\lambda}_3 = -\frac{1}{6}\varepsilon^3\sigma s^3(1-e^2)^{3/2},$$

$$\bar{\lambda}_4 = -\frac{\varepsilon^4 s^4}{64}(1-e^2)^{3/2},$$

$$\bar{\lambda}_{22} = \frac{\varepsilon^4 s^4}{16}(1-e^2)^{3/2},$$

$$\nu = \frac{\varepsilon^2}{4}(1+\sigma^2)(12-15s^2) + \frac{\varepsilon^4}{64}[288 - 1296s^2 +$$

$$+ 1035s^4 - e^2(144 + 288s^2 - 510s^4)],$$

$$k_1^2 = \varepsilon^2 s^2\{1 + \sigma^2 - e^2 - 4\varepsilon^2(1-s^2)(1-e^2)\},$$

$$k_2^2 = \varepsilon^2 e^2\{s^2 - \varepsilon^2(1 - 10s^2 + 11s^4 + e^2 s^4)\},$$

$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a^3}}\left\{1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2) +\right.$$

$$\left. + \frac{3}{8}\varepsilon^4(1-e^2)(1-s^2)(1 + 11s^2 - e^2 + 5e^2 s^2)\right\}. \qquad (3)$$

Формулы (2) — (3) можно применять для любых e и s на интервалах $0 \leqslant e < 1$ и $0 \leqslant s \leqslant 1$. Предполагая величины e и s достаточно малыми, решение обобщенной задачи двух неподвижных центров можно получить в более удобном и компактном виде. Что и проделал автор настоящей работы. Получены ряды для $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, z и w по степеням малых величин ε, σ, e и s (предполагается, что все они являются величинами одного порядка малости) с точностью до пятой степени относительно малых величин включительно.

Введем обозначения

$$l \equiv (1+\lambda)M, \quad l + g \equiv (1+\nu)(1+\lambda)M + \omega.$$

Вышеуказанные ряды имеют следующий вид:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma^2 - \frac{3}{2}\varepsilon^2 e^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 s^2 -$$

$$- e\cos l - \frac{1}{2}e^2\cos 2l + e^3\left[\frac{3}{8}\cos l - \frac{3}{8}\cos 3l\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2 e\cos l+\varepsilon\sigma s\sin(l+g)+\varepsilon^2 e^2\cos 2l+$$

$$+e^4\left[\frac{1}{3}\cos 2l-\frac{1}{3}\cos 4l\right]+\varepsilon\sigma se\,[\sin(2l+g)-\sin g]+$$

$$+\frac{1}{4}\varepsilon^2 s^2\cos(2l+2g)+e^5\left[-\frac{5}{192}\cos l+\frac{45}{128}\cos 3l-\frac{125}{384}\cos 5l\right]-$$

$$-\frac{3}{8}\varepsilon^4 e\cos l+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma^2 e\cos l+\varepsilon^2 e^3\left[-\frac{29}{16}\cos l+\frac{21}{16}\cos 3l\right]+$$

$$+\varepsilon^2 s^2 e\left[-\frac{1}{4}\cos l+\frac{1}{2}\cos(3l+2g)-\frac{1}{4}\cos(l+2g)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s\sin(l+g)+\varepsilon\sigma se^2\left[-2\sin(l+g)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\sin(l-g)+\frac{9}{8}\sin(3l+g)\right].$$

$$\frac{z}{a}=3\varepsilon^3\sigma+\frac{3}{2}\varepsilon\sigma s^2-\frac{3}{2}\varepsilon\sigma e^2+s\sin(l+g)+$$

$$+es\left[\frac{1}{2}\sin(2l+g)-\frac{3}{2}\sin g\right]+$$

$$+e^2 s\left[-\frac{1}{2}\sin(l+g)-\frac{1}{8}\sin(l-g)+\frac{3}{8}\sin(3l+g)\right]+$$

$$+\varepsilon\sigma e\cos l+e^3 s\left[-\frac{3}{8}\sin(2l+g)-\frac{1}{24}\sin(2l-g)+\frac{1}{3}\sin(4l+g)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon\sigma s^2\cos(2l+2g)+\frac{1}{2}\varepsilon\sigma e^2\cos 2l+\varepsilon^2 es\,[3\sin(2l+g)-3\sin g]+$$

$$+e^4 s\left[-\frac{1}{64}\sin(l+g)-\frac{1}{24}\sin(l-g)-\frac{3}{8}\sin(3l+g)-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{128}\sin(3l-g)+\frac{125}{384}\sin(5l+g)\right]+$$

$$+\varepsilon\sigma e^3\left[-\frac{3}{8}\cos l+\frac{3}{8}\cos 3l\right]-3\varepsilon^3\sigma e\cos l+$$

$$+\varepsilon\sigma es^2\left[-\frac{3}{2}\cos l-\frac{5}{4}\cos(l+2g)+\frac{3}{4}\cos(3l+2g)\right]+$$

$$+\varepsilon^2 s^3\left[\frac{3}{16}\sin(l+g)+\frac{3}{16}\sin(3l+3g)\right]+$$

$$+\varepsilon^2 e^2 s\left[-\frac{13}{2}\sin(l+g)-\frac{25}{8}\sin(l-g)+\frac{27}{8}\sin(3l+g)\right]+$$

$$+\varepsilon^2\sigma^2 s\sin(l+g).$$

$$w=\Omega+\omega+\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2+\frac{3}{2}\varepsilon^2\sigma^2-3\varepsilon^2 s^2+\frac{27}{8}\varepsilon^4\right)l+$$

$$+2e\sin l+\frac{5}{4}e^2\sin 2l-\frac{1}{4}s^2\sin(2l+2g)+$$

$$+ e^3\left[-\frac{1}{4}\sin l+\frac{13}{12}\sin 3l\right]+\varepsilon^2 e\sin l+2\varepsilon\sigma s\cos(l+g)+$$

$$+ es^2\left[\frac{1}{2}\sin(l+2g)-\frac{1}{2}\sin(3l+2g)\right]+$$

$$+ e^4\left[-\frac{11}{24}\sin 2l+\frac{103}{96}\sin 4l\right]+$$

$$+ s^4\left[-\frac{1}{8}\sin(2l+2g)+\frac{1}{32}\sin(4l+4g)\right]-$$

$$-\frac{7}{8}\varepsilon^2 e^2\sin 2l+\frac{3}{8}\varepsilon^2 s^2\sin(2l+2g)+$$

$$+ e^2 s^2\left[\sin(2l+2g)-\frac{13}{16}\sin(4l+2g)-\frac{3}{16}\sin 2g\right]+$$

$$+ \varepsilon\sigma es\,[2\cos(2l+g)-2\cos g]+$$

$$+ e^5\left[\frac{5}{96}\sin l-\frac{43}{64}\sin 3l+\frac{1097}{960}\sin 5l\right]+$$

$$+ e^3 s^2\left[-\frac{7}{16}\sin(l+2g)+\frac{1}{48}\sin(l-2g)+\frac{27}{16}\sin(3l+2g)-\right.$$

$$\left.-\frac{59}{48}\sin(5l+2g)\right]+ es^4\left[\frac{1}{4}\sin(l+2g)-\frac{1}{4}\sin(3l+2g)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\sin(3l+4g)+\frac{1}{8}\sin(5l+4g)\right]+$$

$$+ \varepsilon^2 es^2\left[-6\sin l+\sin(l+2g)-\frac{1}{2}\sin(3l+2g)\right]+$$

$$+ \varepsilon\sigma e^2 s\left[-2\cos(l+g)-\frac{1}{4}\cos(l-g)+\frac{9}{4}\cos(3l+g)\right]+$$

$$+ \varepsilon^2 e^3\left[\frac{23}{8}\sin l-\frac{17}{8}\sin 3l\right]+\frac{23}{4}\varepsilon^4 e\sin l+3\varepsilon^2\sigma^2 e\sin l+$$

$$+ \varepsilon\sigma s^3\left[-\frac{1}{2}\cos(l+g)-\frac{1}{2}\cos(3l+3g)\right]-9\varepsilon^3\sigma s\cos(l+g).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П. Сообщения ГАИШ, № 137, 1965.
2. Аксенов Е. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астр., № 6, 1967.

Поступила в редакцию
22.9 1967 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии