Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1968

УДК 538.30

А. Б. КУКАНОВ

ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА НЕКОТОРЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННО ПРОТЯЖЕННЫМИ ЗАРЯЖЕННЫМИ СИСТЕМАМИ В ПРОЗРАЧНОМ ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ

Исследуется излучение Вавилова—Черенкова некоторыми пространственно протяженными равномерно заряженными системами (эллипсоидом, тором, цилиндром), движущимися с постоянной скоростью вдоль оптической оси одноосного прозрачного кристалла.

Вопрос об излучении Вавилова—Черенкова пространственно протяженными заряженными системами и пространственно распределенными токами представляет значительный интерес [1—8][1]. В настоящей работе мы рассмотрим сначала излучение Вавилова—Черенкова некоторой равномерно заряженной по объему системой, которая движется поступательно с постоянной скоростью $\vec{V}$ вдоль оптической оси прозрачного одноосного кристалла. Предполагается, что лабораторная прямоугольная декартова система координат $x_1x_2x_3$ выбрана таким образом, что ось x_3 совпадает с оптической осью кристалла. Пусть ε_3 и μ_3 — соответственно электрическая и магнитная проницаемости прозрачной среды вдоль этой оси, а ε_1 и μ_1 — соответствующие проницаемости в направлениях, перпендикулярных оптической оси (в частности, вдоль декартовых осей координат x_1 и x_2). Мы предполагаем, что излучающая система представляет собой некоторую сплошную структуру, занимающую ограниченную область D и обладающую аксиальной симметрией относительно оси x_3, а также плоскостью симметрии, перпендикулярной к этой оси. Предполагая, что электрический заряд e равномерно распределен по объему структуры, выражение для плотности электрического тока в лабораторной системе координат следует записать в виде

$$\vec{j} = \vec{V}\rho = \frac{\vec{V}\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \begin{cases} \dfrac{e\vec{V}}{V_0'\sqrt{1-\beta^2}} & \text{в области } D \\ 0 & \text{вне области } D, \end{cases} \tag{1}$$

о которой будем предполагать, что снаружи она ограничена поверхностью

$$\left(\frac{x_3 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = f(\xi). \tag{2}$$

[1] В работах [1—8] (в особенности в [6]) можно найти дополнительные ссылки по рассматриваемому вопросу.

Здесь ρ и ρ' — плотность электрического заряда структуры соответственно в лабораторной системе отсчета и в системе покоя K', V'_0 — объем структуры в системе K', $\xi = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $V\beta^{-1} = c$ — скорость света в вакууме. Функция $f(\xi)$ определена в замкнутом промежутке $g \leqslant \xi \leqslant q < +\infty$, причем g может быть и нулем. g и q — соответственно расстояния минимально и максимально удаленных точек структуры от оси x_3; $f(\xi)$ удовлетворяет необходимым требованиям ограниченности, однозначности и непрерывности в указанном промежутке.

Для того чтобы сделать наши результаты более общими, предположим внутри области пространства, ограниченной (2), наличие свободной от заряда области D_1, ограниченной поверхностью

$$\left(\frac{x_3 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = f_1(\xi), \tag{3}$$

причем функция $f_1(\xi)$, определенная в промежутке $g_1 \leqslant \xi \leqslant q_1$, вложенном в $[g, q]$, удовлетворяет тем же условиям, что и $f(\xi)$. Записав систему уравнений Максвелла при наличии $\vec{j}$ и ρ из (1), решаем ее, используя метод Фурье [9, 10]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \iint \vec{E}(\vec{k}, \omega)\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} d^3\vec{k}\, d\omega \quad \text{и т. д.} \tag{4}$$

Для Фурье-компонента $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ получаем

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{2}{\pi}\,\frac{e}{V'_0\sqrt{1-\beta^2}}\,(T^{-1}\vec{V})\,\frac{\delta(\omega - \gamma V)}{i\gamma\omega}\,\Gamma(\varkappa, \gamma), \tag{5}$$

где T^{-1} — тензор, обратный тензору T.

$$(T\vec{E}) = n^2\,[\mathring{\vec{\varkappa}}\,(\mu^{-1}\,[\mathring{\vec{\varkappa}}\vec{E}])\,] + (\varepsilon\vec{E}), \tag{6}$$

$$n^2 = \frac{k^2c^2}{\omega^2},\quad \vec{k}(k_1, k_2, k_3),\quad \mathring{\vec{\varkappa}} = \frac{\vec{k}}{k}, \tag{7}$$

$\varkappa = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, φ, $\gamma = k_3$ — цилиндрические координаты вектора $\vec{k}$.

$$\Gamma(\varkappa, \gamma) = \int\limits_g^q \xi J_0(\varkappa\xi)\sin\left[\gamma\sqrt{(1-\beta^2) f(\xi)}\,\right] d\xi -$$

$$- \int\limits_{g_1}^{q_1} \xi J_0(\varkappa\xi)\sin\left[\gamma\sqrt{(1-\beta^2) f_1(\xi)}\,\right] d\xi. \tag{8}$$

Для подсчета потерь энергии на излучение Вавилова—Черенкова воспользуемся методикой интегрирования [11—14]. Окончательно получаем следующее выражение для потерь энергии на излучение Вавилова—Черенкова на единице пути:

$$W = W_\mu + W_\varepsilon, \tag{9}$$

$$W_\mu = 0;\quad W_\varepsilon = \left(\frac{4\pi e\beta}{V'_0\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 \int\limits_{\varepsilon_1\mu_1\beta^2 > 1} \mu_1\omega^{-1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1\mu_1\beta^2}\right)\Gamma^2(\omega)\, d\omega, \tag{10}$$

где

$$\Gamma(\omega) = \int_g^q J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2) f(\xi)}\right] \xi d\xi -$$

$$- \int_{g_1}^{q_1} J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2) f_1(\xi)}\right] \xi d\xi, \qquad (11)$$

$$S_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}(\varepsilon_1\mu_1\beta^2 - 1)}\,. \qquad (12)$$

W_ε соответствует энергии излучения необыкновенных волн в анизотропном диэлектрике, W_μ — энергии излучения необыкновенных волн в анизотропном магнетике.

Результат $W_\mu = 0$, очевидно, находится в соответствии с [15]. Формула для W_ε отличается от соответствующего результата для точечного заряда [16, 17] наличием множителя $\Phi^2 = \left(\frac{A\Gamma(\omega)}{\omega}\right)^2$ (A — не зависящий от ω коэффициент) под знаком интеграла

$$W_\varepsilon = \frac{e^2}{c^2} \int\limits_{\varepsilon_1\mu_1\beta^2>1} \mu_1\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1\mu_1\beta^2}\right) \omega \Phi^2(\omega)\, d\omega, \qquad (13)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{V}{\omega\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\int_g^q \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2) f(\xi)}\right] d\xi}{\int_g^q \xi \sqrt{f(\xi)}\, d\xi - \int_{g_1}^{q_1} \xi \sqrt{f_1(\xi)}\, d\xi} - \right.$$

$$\left. - \frac{\int_{g_1}^{q_1} \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2) f_1(\xi)}\right] d\xi}{\int_g^q \xi \sqrt{f(\xi)}\, d\xi - \int_{g_1}^{q_1} \xi \sqrt{f_1(\xi)}\, d\xi} \right). \qquad (14)$$

В случае отсутствия свободной от заряда области D_1 следует зачеркнуть вычитаемые интегралы в формулах (8), (11), (14). Формулы (13), (14) могут быть использованы для нахождения интенсивности излучения Вавилова—Черенкова равномерно заряженной поверхностью. В этом случае, выбирая [18]

$f_1(\xi) = f(\xi, h)$; $f(\xi) = f(\xi, h_0)$; $g_1 = g(h)$; $q_1 = q(h)$, $g = g(h_0)$; $q = q(h_0)$

так, что $\lim\limits_{h\to h_0} f_1(\xi) = f(\xi)$; $\lim\limits_{h\to h_0} g_1 = g$; $\lim\limits_{h\to h_0} q_1 = q$, имеем

$$\Phi(\omega) = \frac{V}{\omega\sqrt{1-\beta^2}} \lim_{h\to h_0} \frac{\frac{\partial}{\partial h}\int_{g(h)}^{q(h)} \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2) f(\xi, h)}\right] d\xi}{\frac{\partial}{\partial h}\int_{g(h)}^{q(h)} \xi \sqrt{f(\xi, h)}\, d\xi}. \qquad (15)$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров. Если в системе покоя K' мы имеем равномерно заряженную область, ограниченную снаружи и изнутри эллипсоидальными поверхностями с полуосями соответственно a, a, d и $a' = ah$, $a' = ah$, $d' = dh$

$$\Gamma(\omega) = \int_0^a \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\frac{d\sqrt{1-\beta^2}}{a}(a^2-\xi^2)^{1/2}\right] d\xi -$$

$$-\int_0^{a'} \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\frac{d\sqrt{1-\beta^2}}{a}(a'^2-\xi^2)^{1/2}\right] d\xi =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega S_\varepsilon}{V}\right)^{-2} y_\varepsilon (1+y_\varepsilon^2)^{-3/2}\left\{x_\varepsilon^{3/2}\left(\sqrt{1+y_\varepsilon^2}\right)^{3/2} J_{3/2}\left(x_\varepsilon\sqrt{1+y_\varepsilon^2}\right) - \right.$$

$$\left. - x_\varepsilon'^{3/2}\left(\sqrt{1+y_\varepsilon'^2}\right)^{3/2} J_{3/2}\left(x_\varepsilon'\sqrt{1+y_\varepsilon'^2}\right)\right\}, \tag{16}$$

где

$$x_\varepsilon = \frac{a\omega S_\varepsilon}{V}, \quad x_\varepsilon' = \frac{a'\omega S_\varepsilon}{V}, \quad y_\varepsilon = y_\varepsilon' = \frac{d\sqrt{1-\beta^2}}{aS_\varepsilon}, \tag{17}$$

$J_{3/2}$ — функция Бесселя порядка $3/2$ [19].

Если в системе покоя K' мы имеем равномерно заряженную область, поверхность которой образована вращением вокруг оси x_3 кругового кольца (a и $a' = ah$ — его внешний и внутренний радиусы, b — расстояние его центра от оси x_3).

$$\Gamma(\omega) = \int_{b-a}^{b+a} \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2)[a^2-(\xi-b)^2]}\right] d\xi -$$

$$-\int_{b-a'}^{b+a'} \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) \sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2)[a'^2-(\xi-b)^2]}\right] d\xi. \tag{18}$$

Если круговое кольцо заменить кольцом, ограниченным двумя подобными и подобно расположенными эллипсами соответственно с полуосями a, d и $a' = ah$, $d' = dh$, то в формуле (18) перед радикалами в аргументах синусов следует добавить множитель $\frac{d}{a}$. В случае полого цилиндра (отрезка цилиндрической трубы) с внешним и внутренним радиусами основания, равными соответственно a и $a' = ah$, и высотой (в системе покоя K'), равной $2d$, мы имеем

$$\Gamma(\omega) = \sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\beta^2}}{V}\right)\left\{\int_0^a \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) d\xi - \int_0^{a'} \xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right) d\xi\right\} =$$

$$= \left(\frac{\omega S_\varepsilon}{V}\right)^{-2} \sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\beta^2}}{V}\right)\{x_\varepsilon J_1(x_\varepsilon) - x_\varepsilon' J_1(x_\varepsilon')\}. \tag{19}$$

При $h \to 0$ формулы (16), (18) и (19) приводят к выражениям для $\Gamma(\omega)$ в случаях сплошного эллипсоида, тора и цилиндра. При $h \to 1$ следует рассмотреть $\lim\limits_{h\to 1} \frac{\Gamma(\omega)}{V_0'}$ в соответствии с (15). При этом формула (10) для W_ε будет представлять потери энергии на излучение Вавилова—Черенкова на единице пути равномерно заряженной по поверхности системой—эллипсоидальной, тороидальной поверхностью, отрезком цилиндрической поверхности. Мы имеем в случае эллипсоидальной поверхности

$$\lim_{h\to 1} \frac{\Gamma(\omega)}{V_0'} = \frac{1}{4}\left(\frac{\omega(1-\beta^2)}{2\pi V a S_\varepsilon \sqrt{1+y_\varepsilon^2}}\right)^{1/2} J_{1/2}\left(x_\varepsilon \sqrt{1+y_\varepsilon^2}\right), \tag{20}$$

в случае тороидальной поверхности

$$\lim_{h\to 1} \frac{\Gamma(\omega)}{V_0'} = \frac{\omega\sqrt{1-\beta^2}}{4\pi^2 b V} \int_{b-a}^{b+a} \frac{\xi J_0\left(\frac{\omega S_\varepsilon \xi}{V}\right)\cos\left[\frac{\omega\sqrt{1-\beta^2}}{V}\sqrt{a^2-(\xi-b)^2}\right]d\xi}{\sqrt{a^2-(\xi-b)^2}}, \tag{21}$$

в случае отрезка цилиндрической поверхности

$$\lim_{h\to 1} \frac{\Gamma(\omega)}{V_0'} = \frac{1}{4\pi d}\sin\left(\frac{\omega d\sqrt{1-\beta^2}}{V}\right) J_0(x_\varepsilon). \tag{22}$$

Получающиеся при этом формулы для W_ε можно получить решением уравнений Максвелла, если задать плотность электрического заряда с помощью δ-функций.

В случае заряженной эллипсоидальной поверхности

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{de\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi a^2}\,\delta\left\{(x_3-vt)^2 + \frac{(d\sqrt{1-\beta^2})^2}{a^2}(\xi^2-a^2)\right\}. \tag{23}$$

В случае поверхностно заряженного тора

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi^2 b}\,\delta\{(x_3-vt)^2-(1-\beta^2)[a^2-(\xi-b)^2]\}. \tag{24}$$

В случае заряженного отрезка цилиндрической поверхности [3, 8, 10]:

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{4\pi a d\sqrt{1-\beta^2}}\,\delta(\xi-a)\,\sigma(x_3-Vt), \tag{25}$$

$\sigma = 1$, если $|x_3 - Vt| \leqslant d\sqrt{1-\beta^2}$ и $\sigma = 0$ при остальных x_3.

Анализ величин $\Gamma(\omega)$, $\lim\limits_{h\to 1}\frac{\Gamma(\omega)}{V_0'}$ показывает, что для каждой из них можно указать условия, при которых они приводят к подынтегральному выражению в формуле для W_ε, совпадающему с соответствующим выражением в формуле для точечной частицы [13, 14].

Переходя к исследованию излучения Вавилова—Черенкова пространственно распределенными токами, предположим, что в системе K' равномерно заряженная структура вращается вокруг своей оси симметрии, совпадающей с осью x_3', с постоянной угловой скоростью Ω'. Так как система K' перемещается поступательно с постоянной скоростью $\vec{V}$ вдоль оси x_3, выражение для поперечной составляющей вектора плотности тока в лабораторной системы координат следует записать в виде

$$\vec{j}_{\perp}=\vec{j}'_{\perp}=\vec{u}'(\vec{\xi}')\rho'=\Omega'\xi\vec{e}_{\bar{\varphi}}\begin{cases}\dfrac{e}{V_0'} & \text{в области } D\\ 0 & \text{вне области } D,\end{cases} \tag{26}$$

определенной выше. Здесь $\vec{u}'(\vec{\xi}')$ — линейная скорость точки вращающейся структуры с координатами (x_1', x_2', x_3'), отстоящей от оси вращения на расстоянии $\xi=\xi'=\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}$; $\vec{e}_{\bar{\varphi}}$ — единичный вектор касательной к координатной линии $(\bar{\varphi})$ в лабораторной системе координат. Для Фурье-компонента $\vec{E}_{\perp}(\vec{k},\omega)$ мы получаем

$$\vec{E}_{\perp}(\vec{k},\omega)=-\frac{2}{\pi}\frac{e\Omega'}{V_0'}\frac{\delta(\omega-\gamma V)}{\omega\gamma}Ж(\varkappa,\gamma)(T^{-1}\vec{e}_{\varphi}), \tag{27}$$

где

$$Ж(\varkappa,\gamma)=\int\limits_g^q\xi^2J_1(\varkappa\xi)\sin[\gamma\sqrt{(1-\beta^2)f(\xi)}]\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{g_1}^{q_1}\xi^2J_1(\varkappa\xi)\sin[\gamma\sqrt{(1-\beta^2)f_1(\xi)}]\,d\xi, \tag{28}$$

$\vec{e}_{\varphi}$ — единичный вектор касательной к координатной линии (φ) в полярной системе координат в $\vec{K}$-пространстве. Вычисление потерь энергии на излучение Вавилова — Черенкова, обязанное $\vec{j}_{\perp}$, на единице длины приводит к следующим результатам:

$$W_{\varepsilon}^{\perp}=0;\quad W_{\mu}^{\perp}=\left(\frac{4\pi e\Omega'}{V_0'c}\right)^2\int\limits_{\varepsilon_1\mu_1\beta^2>1}\mu_3\omega^{-1}Ж^2(\omega)\,d\omega, \tag{29}$$

где

$$Ж(\omega)=\int\limits_g^q\xi^2J_1\left(\frac{\omega S_{\mu}\xi}{V}\right)\sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2)f(\xi)}\right]d\xi-$$

$$-\int\limits_{g_1}^{q_1}\xi^2J_1\left(\frac{\omega S_{\mu}\xi}{V}\right)\sin\left[\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2)f_1(\xi)}\right]d\xi, \tag{30}$$

$$S_{\mu}=\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}(\varepsilon_1\mu_1\beta^2-1)}\,. \tag{31}$$

В случае $\vec{j}_{\perp}$, обусловленного вращением равномерно заряженной структуры, ограниченной двумя подобными и подобно расположенными эллипсоидальными поверхностями, формула (30) приводит к выражению

$$Ж(\omega)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega S_{\mu}}{V}\right)^{-3}(1+y_{\mu}^2)^{-5/2}y_{\mu}\times$$

$$\times\left\{\left(x_{\mu}\sqrt{1+y_{\mu}^2}\right)^{5/2}J_{5/2}\left(x_{\mu}\sqrt{1+y_{\mu}^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(x_{\mu}'\sqrt{1+y_{\mu}'^2}\right)^{5/2}J_{5/2}\left(x_{\mu}'\sqrt{1+y_{\mu}'^2}\right)\right\}, \tag{32}$$

$$x_\mu = \frac{a\omega S_\mu}{V}, \quad x'_\mu = \frac{a'\omega s_\mu}{V}, \quad y_\mu = y'_\mu = \frac{d\sqrt{1-\beta^2}}{aS_\mu}. \tag{33}$$

В случае $\vec{j}_\perp$, обусловленного вращением вокруг оси симметрии заряженной структуры, ограниченной двумя подобно расположенными тороидальными поверхностями, формула (30) принимает вид

$$Ж(\omega) = \int\limits_{b-a}^{b+a} \xi^2 J_1\left(\frac{\omega s_\mu \xi}{V}\right) \sin\left\{\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2)[a^2-(\xi-b)^2]}\right\} d\xi -$$

$$- \int\limits_{b-a'}^{b+a'} \xi^2 J_1\left(\frac{\omega s_\mu \xi}{V}\right) \sin\left\{\frac{\omega}{V}\sqrt{(1-\beta^2)[a'^2-(\xi-b)^2]}\right\} d\xi. \tag{34}$$

В случае $\vec{j}_\perp$, обусловленного вращением вокруг оси симметрии заряженного отрезка цилиндрической трубы, формула (25) принимает вид

$$Ж(\omega) = \left(\frac{\omega s_\mu}{V}\right)^{-3} \sin\left(\frac{\omega}{V} d\sqrt{1-\beta^2}\right)\left\{x_\mu^2 J_2(x_\mu) - x'^2_\mu J_2(x'_\mu)\right\}. \tag{35}$$

Формулы для интенсивности излучения Вавилова—Черенкова, обязанного компонентам $\vec{j}_\perp$, обусловленным вращением вокруг оси симметрии заряженными равномерно по объему эллипсоидом, тором, цилиндром, можно получить, если воспользоваться (32)—(35) при $h \to 0$.

Мы получим формулы для интенсивности излучения Вавилова—Черенкова, обязанного компонентам $\vec{j}_\perp$, обусловленным вращением вокруг оси симметрии заряженной эллипсоидальной поверхности, тороидальной поверхности или отрезка цилиндрической поверхности, если, воспользовавшись формулами (32)—(35) для $Ж(\omega)$ в $W_\mu^\perp$ в (29), осуществим предельный переход $\lim\limits_{h\to 1}\frac{Ж(\omega)}{V'_0}$.

Мы будем иметь в случае заряженной эллипсоидальной поверхности

$$\lim_{h\to 1}\frac{Ж(\omega)}{V'_0} = \frac{a}{4\pi d}\left(\frac{\pi x_\mu}{2}\right)^{1/2} y_\mu \left(1+y_\mu^2\right)^{-3/4} J_{3/2}\left(x_\mu\sqrt{1+y_\mu^2}\right), \tag{36}$$

в случае тороидальной поверхности

$$\lim_{h\to 1}\frac{Ж(\omega)}{V'_0} = \frac{\omega\sqrt{1-\beta^2}}{4\pi^2 bV}\int\limits_{b-a}^{b+a} \xi^2 J_1\left(\frac{\omega s_\mu \xi}{V}\right)\frac{\cos\left\{\frac{\omega}{V}\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{a^2-(\xi-b)^2}\right\}}{\sqrt{a^2-(\xi-b)^2}} d\xi, \tag{37}$$

в случае отрезка цилиндрической поверхности

$$\lim_{h\to 1}\frac{Ж(\omega)}{V'_0} = \frac{a}{4\pi d}\sin\left(\frac{\omega d}{V}\sqrt{1-\beta^2}\right) J_1(x_\mu). \tag{38}$$

Формулы для $W_\mu^\perp$ в этих случаях можно также получить, если в формуле $\vec{j}_\perp = \vec{j}'_\perp = \vec{u}'(\vec{\xi}')\rho'$ выражение для ρ' взять из (23)—(25).

Если входящие в формулы (32)—(38) бесселевы и тригонометрические функции разложить в ряд и ограничиться только первыми членами разложения, получаем формулу

$$W_{\mu}^{\perp} = \left(\frac{m_3' \sqrt{1-\beta^2}}{V^2}\right)^2 \int\limits_{\varepsilon_1\mu_1\beta^2>1} \frac{\omega^3\mu_3^2}{\mu_1} (\varepsilon_1\mu_1\beta^2 - 1)\, d\omega, \tag{39}$$

где m_3' — дипольный магнитный момент соответствующей системы в системе K', помещенной в вакууме.

Формула (39), очевидно, совпадает с известным результатом [20] для излучения Вавилова—Черенкова ориентированным вдоль оси магнитным моментом точечной частицы, движущейся вдоль этой оси. Результат $W_{\varepsilon}^{\perp}=0$ в случае излучения таким моментом в прозрачном одноосном ферродиэлектрике был отмечен в [12].

В заключение автор сердечно благодарит проф. А. А. Соколова за интерес к настоящей работе, а также проф. А. А. Власова за ряд стимулирующих советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т а м м И. Е. «Успехи физических наук», 68, 387, 1959.
2. Ф р а н к И. М. «Успехи физических наук», 68, 397, 1959.
3. Б о л о т о в с к и й Б. М. Диссертация. ФИАН, 1954.
4. М о р о з о в А. И. Диссертация. МГУ, 1957.
5. Б о л о т о в с к и й Б. М. «Успехи физических наук», 62, 201, 1957.
6. Б о л о т о в с к и й Б. М. «Успехи физических наук», 75, 295, 1961.
7. E r b e r T., S h i h H. Acta Phys. Austriaca, 19, 17, 1964.
8. Г а з а з я н Э. Д. Диссертация. МГУ, 1964.
9. С и т е н к о А. Г., К о л о м е н с к и й А. А. ЖЭТФ, 30, 511, 1956.
10. И в а н е н к о Д. Д., С о к о л о в А. А. Классическая теория поля. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
11. К у к а н о в А. Б. «Оптика и спектроскопия», 14, 121, 1963.
12. К у к а н о в А. Б., Т х а й К у а н. «Оптика и спектроскопия», 15, 124, 1963.
13. К у к а н о в А. Б., Н з о г е-Н г у е м а Ж. П. «Оптика и спектроскопия», 23, вып. 3, 1967.
14. К у к а н о в А. Б., И л ь ю ш и н а Е. А. «Изв. вузов», физика, № 3, 1968.
15. Г и н з б у р г В. Л. ЖЭТФ, 10, 608, 1940.
16. Ф р а н к И. М., Т а м м И. Е. ДАН СССР, 14, 109, 1937.
17. M u z i k a r C., P a f o m o v V. E. Czechosl. J. Phys., B 11, 709, 1961.
18. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., Физматгиз, 1959.
19. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962, стр. 775.
20. Б е г и а ш в и л и Г. А., Г е д а л и н Э. В. ЖЭТФ, 36, 1939, 1959.

Поступила в редакцию
4.10 1967 г.

Кафедра
теоретической физики