

УДК 528.026.1

Н. Г. КЕЖУТИН

ВЛИЯНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ УСКОРЕНИЙ НА ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

Дается вывод формул, выражающих влияние синусоидальных ускорений на период колебаний маятника; по этим формулам рассчитаны номограммы для оценки случайных ошибок и поправок за систематические влияния, вызванных возмущениями.

Вопрос о влиянии возмущающих колебаний на период колебаний маятника рассматривался в ряде работ [1, 2 и др.]. Ниже излагаются соображения, касающиеся более точного подхода к вычислению ошибки периода колебаний маятника, а также рассмотрено влияние горизонтальных вибраций и микросейсм на период колебаний маятника с учетом нелинейности его колебаний.

Запишем уравнение колебаний маятника в виде

$$I\ddot{\varphi} + Mgl \sin \varphi + Ml \ddot{x} \cos \varphi + Ml \ddot{z} \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

где I , M , l и φ — соответственно момент инерции, масса, приведенная длина и угол отклонения маятника от положения равновесия, g — ускорение силы тяжести, x и z — горизонтальное и вертикальное возмущающие ускорения маятника, вызванные вибрациями или микросейсмическими колебаниями подставки, на которой установлен прибор.

Предположим, что возмущающие ускорения равны

$$\ddot{x} = x_0 \omega^2 \sin \omega t \quad \text{и} \quad \ddot{z} = z_0 m^2 \sin mt, \quad (2)$$

где x_0 , z_0 — амплитуды горизонтальных и вертикальных смещений маятника, обусловленных возмущающими ускорениями, ω и m — их частоты. Введем обозначения $I = Ml^2$ и $p^2 = g/l$. Тогда вместо (1) получим

$$\ddot{\varphi} + p^2 \sin \varphi + \frac{x_0 \omega^2}{l} \cos \varphi \sin \omega t + \frac{z_0 m^2}{l} \sin mt \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Это и есть уравнение колебаний маятника с идеальным ножом на подвижном основании. Оно является нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Если в разложениях $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ ограничимся одним членом, получим линейное уравнение. Если рассматривать только горизонтальные ускорения, это уравнение будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi + \frac{lx_0 \omega^2}{l} \sin \omega t = 0. \quad (4)$$

При начальных данных $t = 0$, $\varphi = a$, $\dot{\varphi} = 0$ его решение

$$\varphi = A \sin(pt + \alpha) + \frac{x\omega^2}{l(p^2 - \omega^2)} \sin \omega t, \quad (5)$$

где

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{x^2 \omega^6}{l^2 p^2 (p^2 - \omega^2)^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{alp(p^2 - \omega^2)}{x\omega^3},$$

A и α зависят от начальных данных.

Возьмем моменты

$$t_1 = kS - \frac{\alpha}{p} \quad \text{и} \quad t_2 = t_1 + S = (k+1)S - \frac{\alpha}{p},$$

где S — полупериод свободных колебаний маятника. В таких случаях $\sin(pt_1 + \alpha) = 0$ и $\sin(pt_2 + \alpha) = 0$. Положение маятника зависит от амплитуды и фазы возмущения. Если бы не было возмущения, маятник прошел бы положение статического равновесия в моменты t_1 и t_2 . Поскольку есть возмущение, выраженное членом

$$\frac{x\omega^2}{l(p^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

в (5), моменты прохождения положения равновесия будут отличаться от t_1 и t_2 . Положим, это отличие равно τ . Тогда в момент $t = kS - \frac{\alpha}{p} + \tau$ будем иметь $\varphi(t) = 0$. Определим величину τ . Имеем

$$\sin(pt + \alpha) = \pm \sin p\tau.$$

С точностью 6% при $\tau < S/5$ сек и любом S справедливо приближенное равенство

$$\sin p\tau \approx p\tau. \quad (6)$$

Величина τ связана с периодом возмущений T : она может составить самое большее $T/4$. Таким образом, (6) справедливо с точностью 6% при условии $T \leq 0,4$ сек. Очевидно, это будет также всегда выполняться при $T > 5$ сек. При этих условиях и учитывая, что $|\sin \omega t| \leq 1$, из (5) получаем

$$Ap|\tau|_{\max} = \frac{x\omega^2}{l(p^2 - \omega^2)}, \quad (7)$$

где $|\tau|_{\max}$ — максимальная ошибка в определении момента прохождения маятником положения равновесия. Максимальная ошибка в определении полупериода будет равна

$$\delta = 2|\tau|_{\max}/N, \quad (8)$$

где N — число полуколебаний в серии наблюдений. Если $N = 1$, из (7), подставляя выражение A по (5) и производя подстановки $\omega = 2\pi/T$ и $p = \pi/S$, получаем формулу

$$\delta = \frac{T}{\pi \sqrt{1 + \left\{ \frac{\alpha Sg T}{2x\pi^2} \left[\left(\frac{T}{2S} \right)^2 - 1 \right] \right\}^2}}. \quad (9)$$

Положим $\delta = \text{const}$ и рассчитаем на основании (9), какими должны быть амплитуды x в зависимости от T , чтобы максимальное влияние возмущений равнялось δ сек. Для примера возьмем следующие значения параметров маятника: $a = 0,005$, $S = 0,5$ сек. Положим $\delta = 1 \cdot 10^{-7}$, 10^{-6} сек и т. д. Результаты расчета изображены на рис. 1. Там же показаны амплитуды и периоды встречавшихся на практике горизонтальных возмущений: эти параметры варьируют в очень широких пределах — от долей миллиметра до метра и от тысячных долей секунды до нескольких десятков секунд. В частности, вибрации столба по измерениям автора имеют амплитуду до 100 ммк при периодах 0,05 сек. Как видим из рисунка, это может привести к ошибке, равной $3 \cdot 10^{-5}$ сек. В работе [5] приводятся средние квадратические ошибки определения единичного периода колебаний маятника фотоэлектрическим способом: для полусекундных маятников эта ошибка оказалась равной $5 \cdot 10^{-5}$ сек, т. е. близкой к рассчитанной нами. Как будто можно предположить, что источником ошибок являются вибрации. Но обратимся к формуле (9). Для вибраций ($T \ll 2S$) можем написать $\delta = \frac{2\pi x}{Sag}$,

т. е. ошибка должна быть обратно пропорциональна периоду маятника. В работе [5] получен противоречащий результат: средняя квадратическая ошибка полусекундного маятника вдвое больше, чем ошибка четвертисекундного маятника.

В работе [2] Н. Н. Парийским получена для рассматриваемого случая формула, которая при $\omega \ll p$ совпадает с (9), а при $\omega \gg p$ дает оценку, завышенную в отношении ω/p . В наших обозначениях она имеет вид:

$$\delta = \frac{2\omega^2 \left(1 + \frac{\omega}{p}\right)}{agp(p^2 - \omega^2)} \quad (10)$$

Будем считать, что на маятник действует только вертикальное ускорение. По-прежнему рассматриваем линейное уравнение. Для этого случая в работе [2] выведена формула, выражающая влияние возмущающих колебаний на частоту колебаний маятника. Запишем ее в наших обозначениях:

$$p_1^2 = p^2 + \frac{z^2 m^4}{2l^3(m^2 - 4p_1^2)} \quad (11)$$

Здесь p_1 — частота колебаний маятника, измененная под влиянием возмущения. При $m < 2p$ частота колебаний маятника уменьшается, при $m > 2p$ увеличивается. При $T = 2$ сек, $z = 104$ см имели бы $p_1/p = 1/2$. Но подобные случаи на практике не встречаются, и изменение частоты составляет небольшую величину. Оценим это изменение в зависимости от параметров возмущений. Из (11) получаем выражение ошибки периода маятника:

$$\delta S = \frac{Sz^2(2\pi)^4}{16g^2T^4} \cdot \frac{1}{1 - (S/T)^2} \quad (12)$$

Воспользовавшись этой формулой, построим кривые $\delta S = \text{const}$ для $S = 0,5$ сек (рис. 2). Среди вертикальных возмущений только вибрация и качка судна и самолета оказывают серьезное влияние на частоту колебаний маятника. В этих случаях ошибка, обусловленная вибрацией, не меньше, чем ошибка, вызванная качкой, и достигает величины

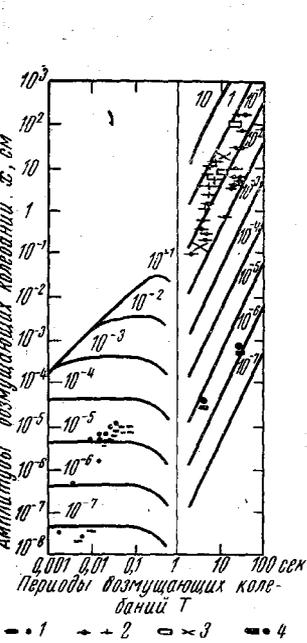


Рис. 1

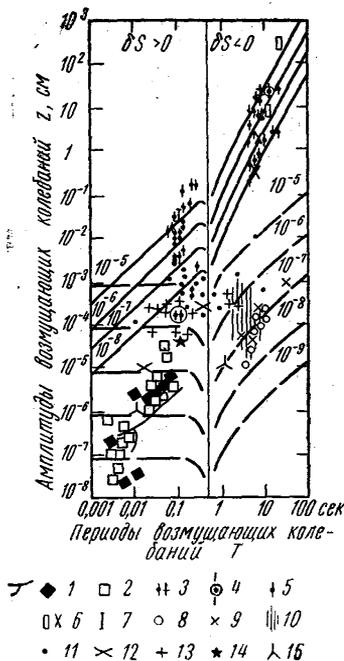


Рис. 2

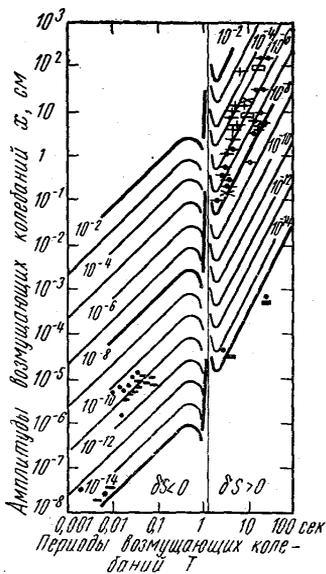


Рис. 3

Рис. 1. Номограмма для оценки случайной ошибки периода колебания маятника по параметрам горизонтальных возмущений. Числа 10^{-6} , 10^{-5} и т. д. соответствуют ошибке $\delta = 1 \times 10^{-6}$, 10^{-5} сек и т. д. 1 — вибрации поперек и вдоль столба, по измерениям автора; 2 — качка судна водоизмещением 20 000 и 16 000 т, пересчет данных Суходольского об ускорениях и периодах; 3 — возмущения самолета и гондолы, пересчет данных Тараканова; 4 — микросейсмы в направлении EW и NS по сейсмограммам сейсмической станции «Москва», обработанным автором

Рис. 2. Номограммы для оценки случайной ошибки одного периода колебания маятника (пунктирные линии) и для определения поправки за систематическое влияние, вызванных вертикальными возмущениями. Числа 10^{-9} , 10^{-8} и т. д. означают, что данная линия соответствует ошибке или поправке, равной 1×10^{-9} , 10^{-8} сек и т. д. Обозначения параметров возмущений: 1 — вибрации грунта, асфальтированных и бетонированных площадок на аэродромах и вибрации столба в лаборатории по измерениям автора; 2 — вибрации в обычных условиях наблюдений с гравиметром в поле по Буданову; 3 — качка на судне водоизмещением 20 000 и 16 000 т; пересчет данных Суходольского об ускорениях и периодах; 4 — качка на судне водоизмещением 5500 т; 5 — вибрации судна д/з «Россия» по Суходольскому; 6 — качка самолета и гондолы по Тараканову (получено путем пересчета); 7 — вибрация виброзащищенного акселерометра на самолете по Тараканову; 8 — микросейсмы в Пулково по [1]; 9 — в Москве и 10 — в других городах Советского Союза по [9]; 11 — вибрации в неблагоприятных условиях (на фундаменте дизеля и т. п.) по [2]; 12 — вибрации мостов в Ленинграде по [2]; 13 — вибрации в Америке по [2]; 14 — вибрации на дне Черного моря по Л. Н. Рыкунову и 15 — вибрации на Аляске по [2]

Рис. 3. Номограмма для определения поправки за систематическое влияние горизонтальных возмущений на период колебаний маятника. Обозначения те же, что на рис. 1

более $1 \cdot 10^{-5}$ сек. Качка судна учитывается поправкой «за вертикальные ускорения», которую можем записать в виде

$$\delta g = \frac{\bar{z}^2}{4g} \cdot \frac{1}{1 - (S/T)^2}. \quad (13)$$

Здесь \bar{z}^2 — средний квадрат вертикальных ускорений. Эту же формулу следует использовать для учета вибрации. При $T < S$ поправка отрицательна.

Малые вибрации почвы и микросейсмы могут оказаться опасными разве только в исключительно редких случаях.

Этим не ограничивается влияние вертикальных возмущений. Рассмотрим формулу, описывающую движение маятника. Используя первое приближение решения соответствующего уравнения по [2], можем написать

$$\varphi = ab \sin(p_1 t + \eta) - \frac{zm^2}{l} \left[\frac{a \cos\{(m+p_1)t + \gamma\}}{2m(m+2p_1)} + \frac{a \cos\{(m-p_1)t + \gamma\}}{2m(m-2p_1)} \right], \quad (14)$$

где

$$b = \sqrt{\left(1 + \frac{\frac{zm^2}{l} \cos \gamma}{m^2 - 4p_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{zm^2}{l} \sin \gamma}{mp_1}\right)^2}. \quad (15)$$

Величины b и η зависят от начальных условий. О влиянии изменения частоты мы уже говорили. Поэтому здесь будем считать $p_1 = p$. Второй член (14) имеет под знаком тригонометрических функций частоты, отличные от собственной частоты колебания маятника. Эти колебания накладываются на собственные колебания маятника, в результате чего изменяется момент прохождения положения равновесия. Подобно тому, как мы уже делали, возьмем момент времени $t = kS - \eta/p + \tau$, т. е. таким, чтобы $\varphi(t) = 0$. Тогда из (14), заменяя косинусы единицей, получаем

$$|\tau|_{\max} = \frac{zm^2}{2lmbp} \left(\frac{1}{m+2p} + \frac{1}{|m-2p|} \right). \quad (16)$$

При определении периода по N полуколебаниям две таких величины могут в худшем случае сложиться, и максимальная ошибка δ в полу-периоде будет

$$\delta = 2 |\tau|_{\max} / N. \quad (17)$$

Если $m \gg 2p$ или $m \ll 2p$, формулу (16) можно записать в двух видах:

$$|\tau|_{\max} = \frac{z\pi}{gS} = \frac{z}{\sqrt{gl}} \quad (18)$$

и

$$|\tau|_{\max} = \frac{zm}{2g}. \quad (19)$$

По формулам (16)–(19) рассчитаем кривые $\delta = \text{const}$ для случая, когда $N = 1$, а остальные параметры имеют те же значения, что и прежде. Результат показан на рис. 2 (пунктиром), откуда видно, что такого рода влияние вертикальных возмущений достаточно слабо за исключением случаев, когда наблюдения выполняются на судне или на самолете. Соответствующая ошибка в определении периода колебаний маятника значительно ослабляется, в зависимости от продолжительности серии наблюдений.

Рассмотрим уравнение (3) в случае, когда вертикальные ускорения отсутствуют, и в разложениях $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ возьмем по два члена. Получим

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi - \frac{p^2}{6} \varphi^3 + \frac{x\omega^2}{l} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \sin \omega t = 0. \quad (20)$$

Будем искать решение по схеме, разработанной А. Н. Крыловым:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots, \quad (21)$$

а частоту колебаний представим в виде

$$p^2 = p_1^2 + s_1 \varepsilon + s_2 \varepsilon^2 + \dots, \quad (22)$$

где $\varepsilon = x\omega^2/l$, а величины s_1, s_2, \dots определяются из условия периодичности решения (21). При этих условиях вместо (20), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие уравнения:

$$\ddot{\varphi}_0 + p_1^2 \varphi_0 + \varepsilon \sin \omega t = 0; \quad (23)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + p_1^2 \varphi_1 = -s_1 \varphi_0 + \frac{p_1^2 + \varepsilon s_1}{6\varepsilon} \varphi_0^3 + \frac{1}{2} \varphi_0^2 \sin \omega t. \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + p_1^2 \varphi_2 = & -s_2 \varphi_0 - s_1 \varphi_1 + \frac{p_1^2 + \varepsilon s_1}{2\varepsilon} \varphi_0^2 \varphi_1 + \\ & + p_1^2 \varphi_0 \varphi_1 \sin \omega t + \frac{1}{2} p_1^2 \varphi_0 \varphi_1^2 + \frac{s_2}{6} \varphi_0^3. \end{aligned} \quad (25)$$

Решение уравнения (23) или нулевое приближение решения уравнения (20) есть

$$\varphi_0 = A \sin(p_1 t + \alpha) - \frac{\varepsilon \sin \omega t}{p_1^2 - \omega^2}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (24) и выполняя нужные преобразования тригонометрических функций, получим уравнение для определения φ_1 :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + p_1^2 \varphi_1 = & \left[-s_1 A - \frac{A\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{p_1^2 + \varepsilon s_1}{8\varepsilon} A^3 + \right. \\ & \left. + \frac{A}{4\varepsilon} (p_1^2 + \varepsilon s_1) \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^2 \right] \sin(p_1 t + \alpha) + \\ & + \left\{ \frac{s_1 \varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} + \frac{A^2}{4} + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{p_1^2 + \varepsilon s_1}{6\varepsilon} \left[-\frac{3A^2 \varepsilon}{2(p_1^2 - \omega^2)} - \frac{3}{4} \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^3 \right] \right\} \sin \omega t + \left[-\frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{p_1^2 + \varepsilon s_1}{24\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^3 \right] \sin 3\omega t - \frac{p_1^2 + \varepsilon s_1}{24\varepsilon} A^3 \sin 3(p_1 t + \alpha) + \\ & + \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{A\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} - \frac{3A}{4} \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^2 \right] (\sin[(p_1 - 2\omega)t + \alpha] + \\ & + \sin[(p_1 + 2\omega)t + \alpha]) - \frac{A^2}{8} \sin[(\omega - 2p_1)t + \alpha] - \frac{A^2}{8} \sin[(\omega + 2p_1)t + \alpha] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{p_1^2 + \varepsilon s_1}{p_1^2 - \omega^2} \cdot \frac{A^2}{8} (\sin [(\omega - 2p_1)t - 2\alpha] + \sin [(\omega + 2p_1)t + 2\alpha]). \quad (27)$$

Для s_1 имеем выражение

$$s_1 = \left[\frac{p_1^2 A^2}{8\varepsilon} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} + \frac{p_1^2}{4\varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^2 \right] : \left[1 - \frac{A^2}{8} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

Решение (27) при условии (28) есть:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & B \sin(p_1 t + \beta) + C \frac{\sin \omega t}{p_1^2 - \omega^2} + D \frac{\sin 3\omega t}{p_1^2 - 9\omega^2} + \varepsilon \frac{\sin 3(p_1 t + \alpha)}{-8p_1^2} + \\ & + F \frac{\sin[(p_1 - 2\omega)t + \alpha]}{p_1^2 - (p_1 - 2\omega)^2} + F \frac{\sin[(p_1 + 2\omega)t + \alpha]}{p_1^2 - (p_1 + 2\omega)^2} + \\ & + G \frac{\sin[(\omega - 2p_1)t + \alpha]}{p_1^2 - (\omega - 2p_1)^2} + G \frac{\sin[(\omega + 2p_1)t + \alpha]}{p_1^2 - (\omega + 2p_1)^2} + \\ & + H \frac{\sin[(\omega - 2p_1)t - 2\alpha]}{p_1^2 - (\omega - 2p_1)^2} + H \frac{\sin[(\omega + 2p_1)t + 2\alpha]}{p_1^2 - (\omega + 2p_1)^2}, \quad (29) \end{aligned}$$

где B и β определяются начальными данными, а значения остальных коэффициентов понятны из выражения (27).

Решение уравнения (20) в первом приближении получим, подставляя в (21) выражения (26) и (29). Оно содержит как основную часть решение (5) линейного уравнения (4). Для подтверждения этого оценим члены, дополнительно возникшие в результате рассмотрения нелинейного уравнения при $x = 0,04$ см, $T = 0,1$ сек. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varepsilon C \sin \omega t}{p^2 - \omega^2} \right| &\leq 1 \cdot 10^{-8}, & \left| \frac{\varepsilon F \sin[(p \mp 2\omega)t + \alpha]}{p^2 - (p \mp 2\omega)^2} \right| &\leq 8 \cdot 10^{-10}, \\ \left| \frac{\varepsilon D \sin 3\omega t}{p^2 - 9\omega^2} \right| &\leq 5 \cdot 10^{-11}, & \left| \frac{\varepsilon G \sin[(\omega \mp 2p)t + \alpha]}{p^2 - (\omega \mp 2p)^2} \right| &\leq 5 \cdot 10^{-9}, \\ \left| \frac{\varepsilon \varepsilon \sin 3(p t + \alpha)}{-8p^2} \right| &\leq 6 \cdot 10^{-10}, & \left| \frac{\varepsilon H \sin[(\omega \mp 2p)t \mp 2\alpha]}{p^2 - (\omega \mp 2p)^2} \right| &\leq 5 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

Основной член, с которым связана ошибка определения периода, равен $\varepsilon \sin \omega t / (p^2 - \omega^2) = 1,6 \cdot 10^{-3}$, т. е. намного превосходит эти величины. Здесь речь идет о случайных ошибках, связанных с амплитудой и фазой возмущений. Для них в рассматриваемом нелинейном случае сохраняется оценка (9).

Для возмущенной частоты на основании (22) имеем $p^2 = p_1^2 + \varepsilon s_1$ и по (28):

$$p^2 = p_1^2 + \varepsilon \left[\frac{p_1^2 A^2}{8\varepsilon} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} + \frac{p_1^2}{4\varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^2 \right] : \left[1 - \frac{A^2}{8} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2 - \omega^2} \right)^2 \right]. \quad (30)$$

С точностью до малых второго порядка относительно поправки за амплитуду $A^2/8$ и поправки за горизонтальные ускорения из (30) получаем выражение поправки за горизонтальные ускорения для одиночного маятника, совпадающее с соответствующим выражением для фиктивного маятника, полученным в работе [6]:

$$\Delta g = - \frac{\overline{x^2}}{2g} \cdot \frac{1 - 2\varepsilon_1^2}{(1 - \varepsilon_1^2)^2}, \quad (31)$$

где ε_1 обозначает отношение ω/p , а $\overline{x^2}$ — средний квадрат ускорений, который в случае синусоидальных возмущений равен $x_0^2\omega^4/2$. Отсюда, полагая $\varepsilon_1 \ll 1$ или $\varepsilon_1 \gg 1$, получим формулы поправки, соответствующие случаям качки и вибрации. Для поправки полупериода маятника из (31), заменяя p и ω через соответствующие периоды колебаний $2S$ и T , получаем

$$\delta S = \frac{2Sx^2\pi^4}{g^2T^4} \cdot \frac{1 - 2(2S/T)^2}{[1 - (2S/T)^2]^2}. \quad (32)$$

При $T \gg 2S$ ошибка прямопропорциональна S , а при $T \ll 2S$ — обратнопропорциональна. На рис. 3 показаны кривые $\delta S = \text{const}$, рассчитанные по этой формуле для случая $S = 0,5$ сек. Если $T > 2\sqrt{2}S$, величина δS положительна, если $T < 2\sqrt{2}S$ — отрицательна. Влияние вибраций столба, на котором выполняются наблюдения, оказывается незначительным — самое большее $5 \cdot 10^{-11}$ сек, тогда как качка судна может привести к ошибке $1 \cdot 10^{-5}$ сек. Сведений о горизонтальных вибрациях судов и самолетов не имеется. Вероятно, они такие же, как и вертикальные вибрации: при периодах $0,1$ сек амплитуда $0,04$ см (рис. 2). В таком случае их влияние также весьма существенно и его следует учитывать по формуле (32).

Вообще говоря, существуют такие значения x и T , при которых частота колебаний маятника становится сколько угодно много отличной от невозмущенной частоты, например вдвое меньше ее. Расчет на основании формулы (30) показывает, что это осуществляется при $T = 0,1$ сек, $x = 0,12$ см и других значениях параметров. Это намного больше амплитуд, которые встречаются даже на судах и самолетах.

Ошибка приращения силы тяжести, обусловленная влиянием вибрации, может быть записана в виде $\delta g = (\Delta g)_1 - (\Delta g)_2$, где значки 1 и 2 относятся к первому и второму пунктам. При $\varepsilon_1 \gg 1$ получаем

$$\delta g = (x_2^2\omega_2^2 - x_1^2\omega_1^2)/2l. \quad (33)$$

Как видим, влияние вибраций на двух связываемых пунктах частично исключается. Если параметры вибраций на этих пунктах значительно отличаются, в определяемом приращении возникает систематическая ошибка.

Итак, вибрации на судне так же, как и качка, приводят к систематическим ошибкам в определяемых приращениях силы тяжести. Поэтому следует измерять параметры вибраций и в случае, если они существенны, вводить поправку в период или приращение силы тяжести. Систематическая ошибка вследствие действия вибраций при наблюдениях на столбах в обычных условиях незначительна. Следует, однако, изучать параметры вибраций в разных условиях с тем, чтобы иметь достаточно полные сведения о них. Кроме того, имеется случайная ошибка. Фотозапись дает слегка размытую линию, при обработке она осредняется и в результате эта ошибка ослабляется. Кроме того, она

уменьшается пропорционально продолжительности серии и количеству серий. В случае фотоэлектрической регистрации осреднения не происходит. Поэтому ослабление ошибки зависит только от продолжительности серии и количества серий.

В заключение автор выражает признательность своему руководителю М. У. Сагитову, а также В. Л. Пантелееву, который сделал ряд замечаний по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Очаповский Б. Л. «Уч. зап. ЛГУ», вып. 14, № 91, 1948.
2. Парийский Н. Н. «Тр. геофиз. ин-та АН СССР», № 12 (139), 1950.
3. Тараканов Ю. А. Реферат кандидатской диссертации. МГУ, 1966.
4. Суходольский В. В. Реферат кандидатской диссертации. Ин-т физики Земли, 1965.
5. Коган М. Г., Сливин Ю. А. Труды ЦНИИГАиК, вып. 159, 1964.
6. Романюк В. А. «Изв. АН СССР», сер. геофизич., № 4, 1957.
7. Пантелеев В. Л. Труды ГАИШ, 36, 1967.
8. Буданов В. Г., Кожанов К. Н. Сб. «Прикладная геофизика», вып. 49. М., «Недра», 1967.
9. Бюллетени микросейсмических колебаний по данным сейсмических станций СССР, сентябрь—октябрь, 1966 г., Иркутский политехнич. ин-т, Иркутск, 1967 (ротационный).

Поступила в редакцию
26.10 1967 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии