УДК 521.13

Л. Г. ЛУКЬЯНОВ

РЕШЕНИЯ, БЛИЗКИЕ К ТРЕУГОЛЬНЫМ ЛАГРАНЖЕВЫМ

Дано построение аналитической теории второго приближения движения бесконечно малой массы вблизи треугольных точек либрации в плоской эллиптической задаче трех тел.

Движение бесконечно малой массы в координатах Нехвила вблизи треугольных точек либрации в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел описывается системой дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dv^2} - 2 \frac{d\eta}{dv} &= \bar{r} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \frac{d^2\eta}{dv^2} + 2 \frac{d\xi}{dv} &= \bar{r} \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ξ, η — координаты бесконечно малой массы в системе координат с началом в точке либрации (далее рассматривается точка L_4),

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{(\xi+\alpha)^2 + (\eta+\beta)^2}{2}, \\ r_1^2 &= (\xi + \alpha + \mu)^2 + (\eta + \beta)^2, \quad r_2^2 = (\xi + \alpha - 1 + \mu)^2 + (\eta + \beta)^2, \\ \alpha &= \frac{1-2\mu}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{r} = \frac{1}{1+e \cos v}, \end{aligned}$$

$(1-\mu)$ и μ — массы конечных тел ($\mu < 0,5$); v, e — истинная аномалия и эксцентриситет конечных тел. Единицы измерений выбраны так, что сумма конечных масс, расстояние между ними и гравитационная постоянная равны единице.

Разложение функции Ω в ряд Тейлора по степеням величин ξ и η имеет вид

$$\Omega = \Omega_2 + \Omega_3 + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \frac{1}{2} \Omega_{xx} \xi^2 + \frac{1}{2} \Omega_{yy} \eta^2 + \Omega_{xy} \xi \eta, \quad \Omega_3 = \frac{1}{3} \Omega_{xxx} \xi^3 + \\ &+ \frac{1}{3} \Omega_{yyy} \eta^3 + \Omega_{xxy} \xi^2 \eta + \Omega_{xyy} \xi \eta^2, \quad \Omega_{xx} = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{yy} = \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

$$\Omega_{xy} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu), \quad \Omega_{xxx} = \frac{21}{16}(1-2\mu),$$

$$\Omega_{yyy} = 3\Omega_{xyy} = -\frac{9\sqrt{3}}{16}, \quad \Omega_{xyy} = -\frac{33}{16}(1-2\mu).$$

В соответствии с методом Ляпунова [2] будем искать решение уравнений (1) в виде

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + \dots, \quad (2)$$

где через x обозначена матрица-столбец с компонентами $\xi, \eta, \frac{d\xi}{dv}, \frac{d\eta}{dv}$; $x^{(1)}$ — решение уравнений (1) при учете Ω_2 , $x^{(2)}$ — решение уравнений (1) при учете Ω_3 и т. д.

Если ввести в рассмотрение матрицу

$$P = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3\bar{r} & 3\sqrt{3}(1-2\mu)\bar{r} & 0 & 8 \\ 3\sqrt{3}(1-2\mu)r & 9r & -8 & 0 \end{vmatrix},$$

то из (1) и (2) получим уравнения

$$\frac{dx^{(1)}}{dv} = Px^{(1)}, \quad (3) \quad \frac{dx^{(2)}}{dv} = Px^{(2)} + q, \quad (4)$$

где q определяется формой третьего порядка Ω_3 и решением $x^{(1)}$.

Уравнения (4) представляют собой уравнения в вариациях. Их решение получено в [1]:

$$x^{(1)} = x^{(10)} + \varepsilon x^{(11)} + \varepsilon^2 x^{(12)} + \dots,$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{1-e^2}-1}{e}$, а $x^{(10)}, x^{(11)}, \dots$ — некоторые функции v .

Это решение получается в предположении, что корни определяющего уравнения $|P^{(0)} - \lambda E| = 0$ чисто мнимые и не удовлетворяют соотношениям вида $\lambda_k - \lambda_j = i\rho$ (ρ — целое, $i^2 = -1$). Через $P^{(0)}$ здесь обозначена матрица

$$\frac{1}{4\sqrt{1-e^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4\sqrt{1-e^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sqrt{1-e^2} \\ 3 & 3\sqrt{3}(1-2\mu) & 0 & 8\sqrt{1-e^2} \\ 3\sqrt{3}(1-2\mu) & 9 & -8\sqrt{1-e^2} & 0 \end{vmatrix}.$$

E — единичная матрица.

Будем искать решение уравнения (5) в аналогичном виде

$$x^{(2)} = x^{(20)} + \varepsilon x^{(21)} + \dots$$

Используя разложения $q = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \varepsilon^2 q^{(2)} + \dots$ и

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} \cos v + \varepsilon^2 P^{(2)} \cos 2v + \dots,$$

для последовательного определения $x^{(20)}, x^{(21)}, \dots$ получим системы линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx^{(20)}}{dv} = P^{(0)}x^{(20)} + q^{(0)}, \quad \frac{dx^{(21)}}{dv} = P^{(0)}x^{(21)} + P^{(1)}x^{(20)} \cos v + q^{(1)}, \dots$$

Величина $q^{(0)}$ имеет вид

$$q^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{xx}\xi^{(10)^2} + 2\Omega_{xy}\xi^{(10)}\eta^{(10)} + \Omega_{yy}\eta^{(10)^2} \\ \Omega_{xy}\xi^{(10)^2} + 2\Omega_{yy}\xi^{(10)}\eta^{(10)} + \Omega_{yy}\eta^{(10)^2} \end{pmatrix},$$

где $\xi^{(10)}$ и $\eta^{(10)}$ — первые два компонента матрицы-столбца $x^{(10)}$.

Производя вычисления, для величины $x^{(20)}$ получим выражение

$$x^{(20)} = \sum_{j \geq i} u^{(ij)} C_i C_j, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные,

$$\begin{aligned} u^{(11)} &= c_{0,1} + c_{1,1} \cos 2\Lambda_1 v - b_{1,1} \sin 2\Lambda_1 v, \quad u^{(22)} = \\ &= c_{0,1} - c_{1,1} \cos 2\Lambda_1 v + b_{1,1} \sin 2\Lambda_1 v, \\ u^{(33)} &= c_{0,2} + c_{1,2} \cos 2\Lambda_2 v - b_{1,2} \sin 2\Lambda_2 v, \quad u^{(44)} = \\ &= c_{0,2} - c_{1,2} \cos 2\Lambda_2 v + b_{1,2} \sin 2\Lambda_2 v, \\ u^{(12)} &= 2b_{1,1} \cos 2\Lambda_1 v + 2c_{1,1} \sin 2\Lambda_1 v, \quad u^{(34)} = \\ &= 2b_{1,2} \cos 2\Lambda_2 v + 2c_{1,2} \sin 2\Lambda_2 v, \\ u^{(13)} &= c_{2,1} \cos (\Lambda_1 + \Lambda_2) v - b_{2,1} \sin (\Lambda_1 + \Lambda_2) v + \\ &+ c_{2,-1} \cos (\Lambda_1 - \Lambda_2) v - b_{2,-1} \sin (\Lambda_1 - \Lambda_2) v, \\ u^{(14)} &= b_{2,1} \cos (\Lambda_1 + \Lambda_2) v + c_{2,1} \sin (\Lambda_1 + \Lambda_2) v - \\ &- b_{2,-1} \cos (\Lambda_1 - \Lambda_2) v - c_{2,-1} \sin (\Lambda_1 - \Lambda_2) v, \\ u^{(23)} &= b_{2,1} \cos (\Lambda_1 + \Lambda_2) v + c_{2,1} \sin (\Lambda_1 + \Lambda_2) v + \\ &+ b_{2,-1} \cos (\Lambda_1 - \Lambda_2) v + c_{2,-1} \sin (\Lambda_1 - \Lambda_2) v, \\ u^{(24)} &= -c_{2,1} \cos (\Lambda_1 + \Lambda_2) v + b_{2,1} \sin (\Lambda_1 + \Lambda_2) v + \\ &+ c_{2,-1} \cos (\Lambda_1 - \Lambda_2) v - b_{2,-1} \sin (\Lambda_1 - \Lambda_2) v, \end{aligned}$$

$$\Delta(\kappa) = \kappa^4 + \varphi \kappa^2 + \psi, \quad \varphi = \bar{\Omega}_{xx} + \bar{\Omega}_{yy} - 4, \quad \psi = \bar{\Omega}_{xx} \bar{\Omega}_{yy} - \bar{\Omega}_{xy}^2,$$

$$\Lambda_{1,2} = \sqrt{-\frac{\varphi}{2} \mp \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} - \psi}}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$c_{0,k} = -\frac{\Gamma}{\psi} \begin{pmatrix} \bar{\Omega}_{yy} N_{1,k,-1} - \bar{\Omega}_{xy} N_{2,k,-1} \\ -\bar{\Omega}_{xy} N_{1,k,-1} + \bar{\Omega}_{xx} N_{2,k,-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_{1,k} = \frac{T(2\Lambda_k)}{\Delta(2\Lambda_k)} \begin{pmatrix} N_{1,k,1} \\ N_{2,k,1} \\ -R_{1,k} \\ -R_{2,k} \end{pmatrix}, \quad b_{1,k} = \frac{T(2\Lambda_k)}{\Delta(2\Lambda_k)} \begin{pmatrix} R_{1,k} \\ R_{2,k} \\ N_{1,k,1} \\ N_{2,k,1} \end{pmatrix}, \quad c_{2,m} = \frac{T(\Lambda_1 + m\Lambda_2)}{\Delta(\Lambda_1 + m\Lambda_2)} \begin{pmatrix} L_{1,m} \\ L_{2,m} \\ -M_{1,m} \\ -M_{2,m} \end{pmatrix},$$

$$b_{2,m} = \frac{T(\Lambda_1 + m\Lambda_2)}{\Delta(\Lambda_1 + m\Lambda_2)} \begin{vmatrix} M_{1,m} \\ M_{2,m} \\ L_{1,m} \\ L_{2,m} \end{vmatrix}, \quad T(\kappa) =$$

$$= \begin{vmatrix} -(\bar{\Omega}_{yy} + \kappa^2) & \bar{\Omega}_{xy} & 0 & 2\kappa \\ \bar{\Omega}_{xy} & -(\bar{\Omega}_{xx} + \kappa^2) & -2\kappa & 0 \\ 0 & -2\kappa^2 & -\kappa(\bar{\Omega}_{yy} + \kappa^2) & \kappa\bar{\Omega}_{xy} \\ 2\kappa^2 & 0 & \kappa\bar{\Omega}_{xy} & -\kappa(\bar{\Omega}_{xx} + \kappa^2) \end{vmatrix},$$

$$N_{1,k,m} = \frac{1}{2} [\bar{\Omega}_{xxx} (\Lambda_k^2 + \bar{\Omega}_{yy})^2 - 2\bar{\Omega}_{xxy}\bar{\Omega}_{xy} (\Lambda_k^2 + \bar{\Omega}_{yy}) + \bar{\Omega}_{xyy} (\bar{\Omega}_{xy}^2 - 4m\Lambda_k^2)],$$

$$N_{2,k,m} = \frac{1}{2} [\bar{\Omega}_{xxy} (\Lambda_k^2 + \bar{\Omega}_{yy})^2 - 2\bar{\Omega}_{xyy}\bar{\Omega}_{xy} (\Lambda_k^2 + \bar{\Omega}_{yy}) + \bar{\Omega}_{yyy} (\bar{\Omega}_{xy}^2 - 4m\Lambda_k^2)],$$

$$L_{1,m} = \bar{\Omega}_{xxx} (4\bar{\Omega}_{yy} - \bar{\Omega}_{xy}^2) - \bar{\Omega}_{xxy}\bar{\Omega}_{xy} (2\bar{\Omega}_{yy} - \varphi) + \bar{\Omega}_{xyy} (\bar{\Omega}_{xy}^2 - 4m\Lambda_1\Lambda_2),$$

$$L_{2,m} = \bar{\Omega}_{xxy} (4\bar{\Omega}_{yy} - \bar{\Omega}_{xy}^2) - \bar{\Omega}_{xyy}\bar{\Omega}_{xy} (2\bar{\Omega}_{yy} - \varphi) + \bar{\Omega}_{yyy} (\bar{\Omega}_{xy}^2 - 4m\Lambda_1\Lambda_2),$$

$$R_{1,k} = 2\Lambda_k [\bar{\Omega}_{xxy} (\Lambda_k^2 + \bar{\Omega}_{yy}) - \bar{\Omega}_{xyy}\bar{\Omega}_{xy}], \quad R_{2,k} = 2\Lambda_k [\bar{\Omega}_{xyy} (\Lambda_k^2 + \bar{\Omega}_{yy}) - \bar{\Omega}_{yyy}\bar{\Omega}_{xy}],$$

$$M_{2,m} = 2(\Lambda_1 + m\Lambda_2) [\bar{\Omega}_{xyy} (\bar{\Omega}_{yy} + m\Lambda_1\Lambda_2) - \bar{\Omega}_{yyy}\bar{\Omega}_{xy}], \quad (k=1, 2; m=1, -1).$$

Аналогично могут быть вычислены $\chi^{(21)}, \chi^{(22)}, \dots$

Для системы Земля—Луна имеем [3]: $\mu=0,012116806$; $e=0,054900489$.

Тогда:

$$c_{0,1} = \begin{vmatrix} -8,46875 \\ 2,93599 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad c_{0,2} = \begin{vmatrix} -5,57517 \\ 1,38771 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} \Lambda_1 = 0,29908, \\ \Lambda_2 = 0,95185, \end{matrix}$$

$$c_{1,1} = \begin{vmatrix} 1,52942 \\ -2,70800 \\ -0,32301 \\ -0,73868 \end{vmatrix}, \quad b_{1,1} = \begin{vmatrix} 0,54001 \\ 1,23493 \\ 0,91483 \\ -1,61981 \end{vmatrix}, \quad c_{1,2} = \begin{vmatrix} -1,10027 \\ -0,94657 \\ 0,23556 \\ -1,85200 \end{vmatrix},$$

$$b_{1,2} = \begin{vmatrix} -0,12374 \\ 0,97284 \\ -2,09459 \\ -1,80198 \end{vmatrix}, \quad c_{2,1} = \begin{vmatrix} -3,92517 \\ -1,07126 \\ 1,05981 \\ -0,30804 \end{vmatrix}, \quad b_{2,1} = \begin{vmatrix} -0,84722 \\ 0,24625 \\ -4,91012 \\ -1,34007 \end{vmatrix},$$

$$c_{2,-1} = \begin{vmatrix} 8,25976 \\ -5,75921 \\ 2,01382 \\ -4,44790 \end{vmatrix}, \quad b_{2,-1} = \begin{vmatrix} 3,08503 \\ -6,81386 \\ -5,39175 \\ 3,75946 \end{vmatrix}.$$

Полученные числовые значения коэффициентов c_{ij} и b_{ij} позволяют оценить члены второго порядка $x^{(2)}$ по сравнению с членами первого порядка $x^{(1)}$. Если наибольшее из начальных условий не превосходит 10^{-3} , то члены второго порядка $x^{(2)}$ составляют около 1—2% от членов первого порядка $x^{(1)}$; для начальных условий, не превосходящих 10^{-2} — около 10—20%. Следовательно, для начальных условий, не превосходящих 10^{-3} , можно пользоваться результатами линейной теории [1], допуская при этом ошибку не более нескольких процентов. Дальнейшее увеличение начальных условий требует учета нелинейных членов. Эти результаты хорошо согласуются с результатами сравнения линейной теории с численным интегрированием полной системы дифференциальных уравнений, полученными в [1].

Учет нелинейных членов второго порядка, проведенный в настоящей работе, позволяет использовать получаемое общее решение для начальных условий на порядок больше, чем в линейной теории.

В заключение заметим, что при сделанных предположениях решение $x^{(1)} + x^{(2)}$ имеет чисто тригонометрический вид. Однако в членах третьего порядка $x^{(3)}$ появляются вековые (смешанные) члены.

Заметим также, что решение, полученное в настоящей работе и в [1], пригодно и для исследования движения бесконечно малой массы вблизи второй треугольной точки либрации L_5 . Для этого во всех формулах знаки перед величинами β , Ω_{xy} , Ω_{xx} и Ω_{yy} следует изменить на обратные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукьянов Л. Г. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астроном., № 2, 1968.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
3. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
30.10 1967 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии