

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1968

УДК 533.951 : 533.993

В. И. ТЕЛЕГИН

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

С помощью численного решения задачи Коши для уравнения А. А. Власова рассмотрено взаимодействие продольных ленгмюровских волн с параллельными волновыми векторами в безграничной однородной плазме. В широком интервале температур и амплитуд начальных возмущений выявлен спектр относительно больших возбужденных колебаний и некоторые характерные черты нелинейного поведения плазмы.

В настоящей статье рассмотрено нелинейное взаимодействие продольных электронных волн с параллельными волновыми векторами в нагретой плазме путем численного интегрирования одномерного кинетического уравнения Власова для электронной функции распределения.

К численному решению уравнений, описывающих плазму, приходится обращаться в связи с большим разнообразием движений в плазме и их сложным характером. Например, в большей части нелинейных теорий для всех волновых векторов k продольных волн рассматривается одна частота, ленгмюровская, в то время как в [9] показано, что учет только одной частоты приводит к очень большой погрешности на начальном промежутке времени. Отсюда следует, что если характерное время нелинейных процессов сравнимо с характерным временем затухания колебаний, то поведение плазмы может сильно отличаться от того, которое дается теорией возмущений с учетом одного корня дисперсионного уравнения.

Численное решение задачи Коши для уравнения Власова в рамках бесстолкновительного описания плазмы принципиально не связано с каким-либо конкретным механизмом нелинейного взаимодействия, как, например, в [3—5].

В отличие от работ [1, 2] и [10, 11], где на основе уравнения Власова для нагретой плазмы численными методами изучались главным образом пучковая неустойчивость и затухание Ландау, в данной статье рассматривается результат нелинейного взаимодействия продольных волн в более широком интервале волновых векторов, и, кроме этого, больше внимания уделено частотному составу результирующих колебаний.

Преобразование основных уравнений

При рассмотрении продольных электронных колебаний с параллельными волновыми векторами мы будем интересоваться их поведением за время, большее $2\pi/\omega_{Le}$ и меньшее $2\pi/\omega_{Li}$. Ионы будем считать

неподвижным равномерным фоном и возьмем систему уравнений для электронов в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi n e \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f dv \right),$$

где n — средняя плотность электронов и ионов.

Для численного расчета удобно перейти к безразмерным величинам:

$$x = Lx', \quad v = v_0 v', \quad f = \frac{1}{v_0} f', \quad t = t_0 t', \quad E = E_0 E'.$$

$$t_0 = \omega_{Le}^{-1}, \quad v_0 = L/t_0, \quad E_0 = 4\pi n e L.$$

В качестве характерной длины L может быть взята максимальная длина волны для начального состояния плазмы, а характерного времени — величина, обратная ленгмюровской электронной частоте. Тогда система (1) примет вид (штрихи у величин опущены)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f dv.$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ состояние плазмы задается в виде

$$f(x, v, 0) = (2\pi T)^{-1/2} \exp(-v^2/2T) \sum_{k=0}^{k_0} (a_k^{(0)}(v) \cos kx + a_k^{(1)}(v) \sin kx). \quad (3)$$

Здесь T — безразмерная температура, связанная с дебаевским радиусом r_0 соотношением $(r_0/L)^2 = T$, $a_k^{(0)}(v)$ и $a_k^{(1)}(v)$ — полиномы от v . Электрическое поле E при $t = 0$ найдется из второго уравнения (2). Будем искать приближенное решение задачи (2) и (3) в виде

$$f(x, v, t) = u(x, v/\sqrt{2T}, t) (2\pi T)^{-1/2} \exp(-v^2/2T),$$

$$u(x, \xi, t) = \sum_{l=0}^{l_1} \sum_{k=-k_1}^{k_2} (u_{l,k}^{(0)} \cos \lambda_k x + u_{l,k}^{(1)} \sin \lambda_k x) H_l(\xi), \quad (4)$$

$$E(x, t) = \sum_{k=-k_1}^{k_2} (E_k^{(0)} \cos \lambda_k x + E_k^{(1)} \sin \lambda_k x),$$

где

$$H_l(\xi) = (-1)^l \exp(\xi^2) \frac{d^l}{d\xi^l} \exp(-\xi^2), \quad (5)$$

$$\xi H_l(\xi) = H_{l+1}(\xi)/2 + l H_{l-1}(\xi), \quad dH_l(\xi)/d\xi = 2l H_{l-1}(\xi)$$

полиномы Эрмита, $\xi = v/\sqrt{2T}$, $\lambda_k = k$ при $k \geq 0$ и $\lambda_k = 1/|k|$ при $k < 0$.

Подставляя (4) в (2) и пользуясь (5), получим зацепляющуюся систему уравнений для моментов $u_{l,k}^{(0,1)}$

$$\begin{aligned}
& \frac{du_{l,k}^{(0)}}{dt} + \frac{\sqrt{2T}}{2} \lambda_k u_{l-1,k}^{(1)} + \sqrt{2T} (l+1) \lambda_k u_{l+1,k}^{(1)} = \\
& = -\frac{1}{\sqrt{2T}} \sum_{k'=-k_1}^{k_2} u_{l-1,k'}^{(0)} \left[\frac{N_{|k-k'|}^{(0)}}{2N_k^{(0)}} E_{k-k'}^{(0)} + \frac{N_{k+k'}^{(0)}}{2N_k^{(0)}} E_{k+k'}^{(0)} \right] - \\
& - \frac{1}{\sqrt{2T}} \sum_{k'=-k_1}^{k_2} u_{l-1,k'}^{(1)} \left[-\frac{N_{|k-k'|}^{(1)}}{2N_k^{(0)}} \operatorname{sgn}(\lambda_k - \lambda_{k'}) E_{k-k'}^{(1)} + \frac{N_{k+k'}^{(0)}}{2N_k^{(0)}} E_{k+k'}^{(1)} \right]; \\
& \frac{du_{l,k}^{(1)}}{dt} - \frac{\sqrt{2T}}{2} \lambda_k u_{l-1,k}^{(0)} - \sqrt{2T} (l+1) \lambda_k u_{l+1,k}^{(0)} = \\
& = -\frac{1}{\sqrt{2T}} \sum_{k'=-k_1}^{k_2} u_{l-1,k'}^{(0)} \left[\frac{N_{|k-k'|}^{(1)}}{2N_k^{(1)}} \operatorname{sgn}(\lambda_k - \lambda_{k'}) E_{k-k'}^{(1)} + \frac{N_{k+k'}^{(1)}}{2N_k^{(1)}} E_{k+k'}^{(1)} \right] - \\
& - \frac{1}{\sqrt{2T}} \sum_{k'=-k_1}^{k_2} u_{l-1,k'}^{(1)} \left[\frac{N_{|k-k'|}^{(0)}}{2N_k^{(1)}} E_{k-k'}^{(0)} - \frac{N_{k+k'}^{(0)}}{2N_k^{(1)}} E_{k+k'}^{(0)} \right]; \\
& u_{0,k}^{(1)} = \lambda_k E_k^{(0)}, \quad \delta_{0,k} - u_{0,k}^{(0)} = \lambda_k E_k^{(1)}, \quad (6) \\
& \delta_{0,k} = 0, \dots, 0, 1, 0, \dots; \quad k = 2\pi m; \quad m = 0, \pm 1, \dots
\end{aligned}$$

Отметим, что на любом конечном отрезке времени $0 \leq t \leq t_0$ приближенное решение (4) сходится к решению задачи (2) при увеличении l , k_1 и k_2 . При фиксированных величинах l_1 , k_1 и k_2 с ростом времени t расхождение между приближенным и существующим [6] точным решением увеличивается. Это происходит за счет перекачки энергии по спектру как в сторону верхних, так и нижних гармоник. При не очень больших амплитудах волн перекачка энергии по спектру имеет характер диффузионного процесса. Если спектральная полоса приближенного решения (4) $-k_1 \leq k \leq k_2$ шире полосы начального состояния (3) $0 \leq k \leq k_0$, то приближенное решение хорошо аппроксимирует точное решение задачи (2) до тех пор, пока амплитуды волн, соответствующих крайним гармоникам ($k = -k_1$ и $k = k_2$), малы по сравнению с амплитудами гармоник начального состояния.

При решении задач о нелинейном взаимодействии волн начальное распределение (3) содержало одну—три гармоники по x . Возможности программы для ЭВМ позволяли оставлять в приближенном решении (4) до десяти гармоник по координатам x ($k_2 + k_1 \leq 10$) и до одиннадцати моментов по скоростям v ($0 \leq l \leq 11$). Такой набор гармоник позволял хорошо аппроксимировать решение задачи (2) на довольно большом отрезке времени. Для устойчивых в линейном приближении распределений с начальной амплитудой основной гармоники $\Delta n/n \sim 10^{-1}$ амплитуды крайних гармоник ($k = -k_1$ и $k = k_2$) через пять—шесть периодов колебаний были, как правило, еще на два порядка меньше: $\Delta n/n \leq 10^{-3}$.

Функции $u_{l,k}^{(0,1)}$ представляют собой коэффициенты Фурье от некоторых линейных комбинаций обычных гидродинамических моментов. По-

этому переход от уравнений (2) к системе (6) является по существу заменой кинетического уравнения некоторой высокомоментной системой гидродинамических уравнений. В силу сказанного выше, на конечном отрезке времени все кинетические эффекты будут описываться этой системой при достаточно больших числах l_1 , k_1 и k_2 . В частности, система (6) описывает затухание колебаний (см. рис. 2) вопреки широко распространенному мнению о том, что гидродинамика любого порядка не описывает затухания. Если линейризовать конечную систему (6) и провести гармонический анализ ее решения, то оказывается, что все корни дисперсионного уравнения вещественны, но их набор и набор амплитуд для некоторой задачи Коши таковы, что на конечном промежутке времени колебания затухают, и это затухание по порядку величины совпадает с затуханием Ландау.

Следует также подчеркнуть простоту численной реализации данного метода решения, очевидную обобщаемость его на многомерные задачи и удобство с точки зрения интерпретации результатов.

Результаты вычислений

Для вычислений была выбрана область температур $T = (r_0/L)^2 \leq 5 \cdot 10^{-3}$, в которой затухание Ландау не искажает непосредственно нелинейные эффекты. В рамках этой области температура и амплитуды колебаний плотности менялись в широких пределах. Можно выделить следующие существенные черты решения задачи.

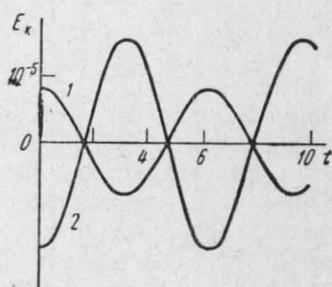


Рис. 1. Коэффициенты Фурье электрического поля при $\sin 2\pi x$ (1) и $\cos 4\pi x$ (2) ($T = 5 \cdot 10^{-5}$)

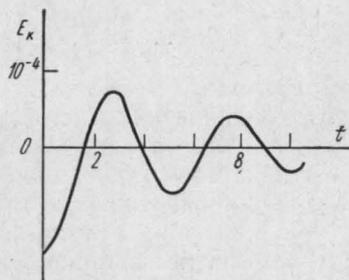


Рис. 2. Коэффициент Фурье электрического поля при $\sin 2\pi x$ ($T = 0,5 \cdot 10^{-2}$)

1. Если в области малых амплитуд колебаний плотности $\Delta n/n_0 \leq 10^{-2}$ (n_0 — средняя плотность, Δn — максимальная величина неоднородности плотности), то происходящие процессы хорошо согласуются с линейной теорией. На рис. 1 изображены коэффициенты Фурье электрического поля для $(kr_0)^2 \sim 10^{-4}$ ($T = 5 \cdot 10^{-5}$), которые представляют собой гармонические колебания с частотой $\omega = (1 + 3(kr_0)^2)^{1/2}$. В области $T = 5 \cdot 10^{-3}$ ($(kr_0)^2 \sim 0,1$) проявляется затухание колебаний. Как уже отмечалось, это обстоятельство не является очевидным, так как система уравнений, по которой велись вычисления, имеет гидродинамический характер¹.

2. Для $(kr_0)^2 \sim 10^{-3}$ и области неоднородностей $10^{-2} \leq \Delta n/n_0 \leq 10^{-1}$ проявляются нелинейные эффекты. В этой области их действие сказыв-

¹ Более подробно этот вопрос рассмотрен в [10].

вается как слабое взаимодействие гармоник с волновыми векторами k , удовлетворяющими комбинационным соотношениям

$$k = k' \pm k'', \quad (7)$$

где k' и k'' принадлежат спектру волновых чисел, для которых E_k при $t=0$ отличны от нуля (первичный спектр). На рис. 3 изображены гармоники $k_1=2\pi$ и $k_2=4\pi$, амплитуды которых заданы при $t=0$, а на

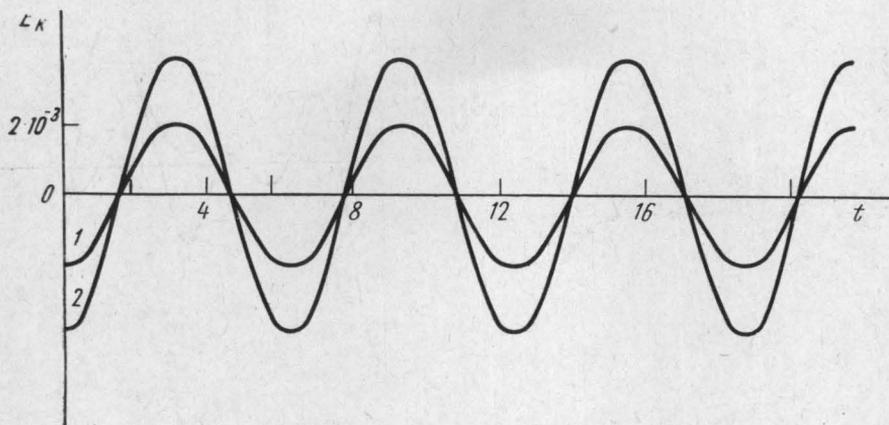


Рис. 3. Возбуждающие гармоники $E_k^{(1)}$ с $k=2\pi$ (1) и $k=4\pi$ (2) при $T=5 \cdot 10^{-5}$

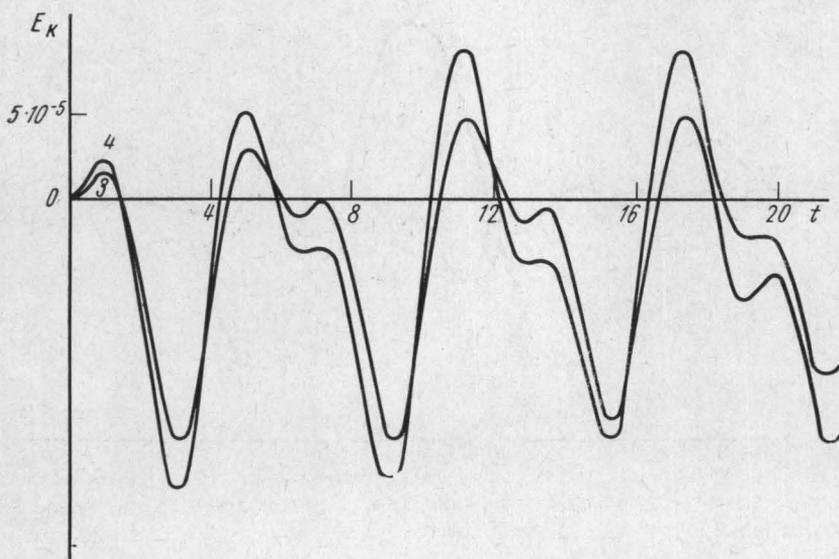


Рис. 4. Гармоники $E_k^{(1)}$ с $k=6\pi$ (3) и $k=8\pi$ (4), возбужденные гармониками рис. 3

рис. 4 — возбужденные (по формулам (7)) гармоники с $k_3=6\pi$ и $k_4=8\pi$. Как видно из рисунка, гармоника $k_4=2k_2$, возбужденная только второй гармоникой k_2 , лишь немного амплитудой отличается от гармоники k_3 , возбужденной в результате взаимодействия гармоник k_1 и k_2 .

Приближенный расчет по методике усреднения [7] показывает, что при взаимодействии двух волн с конечными амплитудами в волне k колебания происходят на частотах $\omega - \Delta\omega$, Ω , $\Omega \pm |(\omega - \Delta\omega)|$, а в волне $2k$ — на частотах Ω , $2(\omega - \Delta\omega)$, $\omega - \Delta\omega$. Здесь $\omega = (1 + 3(kr_0)^2)^{1/2}$, $\Omega = (1 + 3(2kr_0)^2)^{1/2}$, $\Delta\omega = A_0(2k)k^2T/\omega\Omega^2$ — нелинейная поправка к ча-

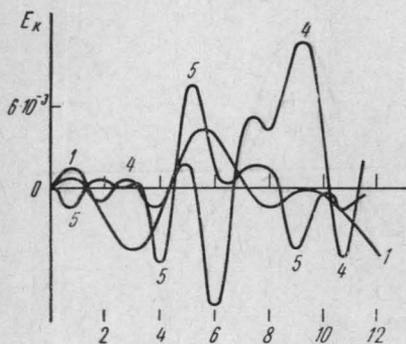


Рис. 5. Возбуждение гармоник с $k=2\pi$ (1), $k=8\pi$ (4) и $k=10\pi$ (5) гармониками рис. 6

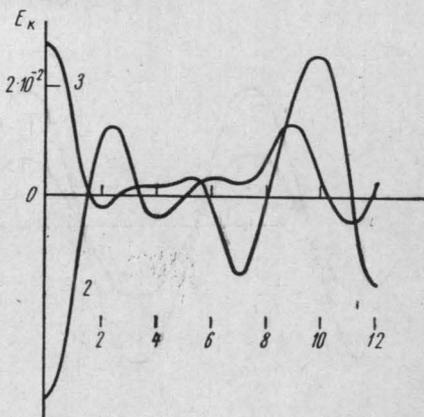


Рис. 6. Гармоники с большой амплитудой $E_k^{(1)}$ с $k=4\pi$ (2) и $k=6\pi$ (3) для $T=2,5 \cdot 10^{-3}$

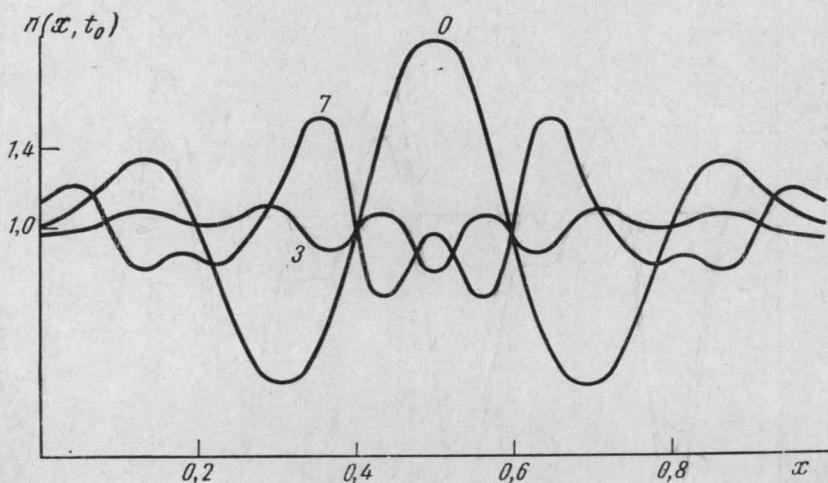


Рис. 7. Распад больших колебаний (рис. 5, 6) плотности электронов $n(x, t)$ (для $t=0, 3, 7$)

стоте ω , зависящая от амплитуды волны $2k$ при $t=0$. Если в начальный момент времени амплитуда волны $2k$ равна нулю, то в ней возбуждаются колебания на частотах Ω , 2ω , ω . Колебания на частоте 2ω хорошо известны (см., например, [8]).

После возбуждения гармоник вторичного по амплитуде спектра начинают возбуждаться гармоники следующего порядка, согласно формулам (7), но k' и k'' принадлежат уже объединенному спектру пер-

вого и второго порядков. Возбуждение распространяется как в сторону $k > k_{\max}$, так и в сторону $k < k_{\min}$ из первичного спектра. Это видно на рис. 5, где второй и третьей гармоникой возбуждены первая и все после третьей. Полная энергия и полный импульс системы с большой точностью остаются постоянными, средняя за период колебаний кинетическая энергия почти не меняется.

3. Для области неоднородностей $\Delta n/n_0 > 10^{-1}$ учета только рассеяния волн на волнах оказывается недостаточно. Существенную роль начинает играть взаимодействие волн с частицами плазмы, приводящее к перераспределению частиц в фазовом пространстве. На рис. 6 и 7 видно, что амплитуды заданных при $t=0$ больших гармоник k_2 и k_3 уже за время порядка половины электронного периода уменьшились в несколько раз. При этом наблюдается увеличение средней кинетической энергии частиц. Фаза и частота сильно отличаются от линейных значений. За время около одного электронного периода другие гармоники нарастают слабо, но затем их амплитуда резко увеличивается, и рост кинетической энергии частиц прекращается. Уменьшение амплитуды больших колебаний не может быть вызвано затуханием Ландау, так как в случае, изображенном на рис. 6, величина затухания Ландау меньше, чем в случае линейных колебаний на рис. 2.

Асимптотические оценки амплитуд и частот

Для объяснения деталей поведения колебаний будем считать, что при $t=0$ в плазме присутствуют только две взаимодействующие волны, волновые векторы которых удовлетворяют комбинационным соотношениям (7). В простейшем случае это будут волновые векторы k и $2k$. Сохраним в системе (6) только величины, относящиеся к этим волнам, положив все остальные равными нулю. Полученная система уравнений будет бесконечной за счет индекса l и нелинейной. Мы сохраним в ней только несколько первых моментов по l . Для случая $l=0, 1, 2$ эта система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{du_{0,k}^{(0)}}{dt} + \sqrt{2T}ku_{1,k}^{(1)} &= 0, \\ \frac{du_{1,k}^{(1)}}{dt} - \frac{\sqrt{2T}}{2}ku_{0,k}^{(0)} - 2\sqrt{2T}ku_{2,k}^{(0)} - \frac{u_{0,k}^{(0)}}{\sqrt{2T}k} &= \frac{u_{0,k}^{(0)}u_{0,2k}^{(0)}}{2\sqrt{2T}2k}, \\ \frac{du_{0,2k}^{(0)}}{dt} + \frac{\sqrt{2T}}{2}ku_{0,k}^{(0)} &= \frac{u_{1,k}^{(1)}u_{0,2k}^{(0)}}{2\sqrt{2T}2k}, \\ \frac{du_{0,2k}^{(0)}}{dt} + \sqrt{2T}2ku_{1,2k}^{(1)} &= 0, \\ \frac{du_{1,2k}^{(1)}}{dt} - \frac{\sqrt{2T}}{2}2ku_{0,2k}^{(0)} - 2\sqrt{2T}2ku_{2,2k}^{(0)} - \frac{u_{0,2k}^{(0)}}{\sqrt{2T}2k} &= \frac{(u_{0,k}^{(0)})^2}{2\sqrt{2T} \cdot k}, \\ \frac{du_{2,2k}^{(0)}}{dt} + \frac{\sqrt{2T}}{2}2ku_{1,2k}^{(1)} &= -\frac{u_{1,k}^{(1)}u_{0,k}^{(0)}}{2\sqrt{2T}k}. \end{aligned} \quad (8a)$$

Здесь не учтены члены, описывающие взаимодействие волн с фоном, так как имеется в виду устойчивая плазма и в силу монохроматичности начального возмущения квазилинейные эффекты будут малы.

Если в системе уравнений (8а) пренебречь правыми частями, то полученная система линейных уравнений имеет решение

$$u_{0,k}^{(0)} = a (A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t) + C),$$

$$u_{1,k}^{(1)} = a (-i\omega) [A \exp(i\omega t) - B \exp(-i\omega t)] / \sqrt{2T} \cdot k, \quad (9)$$

$$u_{0,2k}^{(0)} = a [A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t) + 2(1 + k^2 T) C / k^2 T] / 2.$$

Здесь $\omega^2 = 1 + 3k^2 T$, a — начальное значение гармоники k . Из начальных условий для k -той гармоники следует также

$$A = B = (1 + k^2 T) / 2(1 + 3k^2 T), \quad C = 2k^2 T / (1 + 3k^2 T). \quad (10)$$

Решение линеаризованной системы (8б) можно получить формальной заменой k на $2k$, начального значения a на b и постоянных интегрирования A, B, C на D, E, F со значениями вида (10) в силу начальных условий. В частности, частота колебаний будет равна $\Omega = (1 + 3(2k)^2 T)^{1/2}$.

Будем считать постоянные A, B, \dots, F некоторыми функциями времени; подставим выражения (9) и аналогичные им для $2k$ в систему уравнений (8а и б) и решим полученные уравнения относительно dA/dt и других производных. Получим новую систему уравнений вида

$$\frac{ds}{dt} = aX(t, s), \quad X(t, s) = \sum_{\mu} \exp(i\mu t) X_{\mu}(s), \quad (11)$$

где s, X — векторные функции.

Из (11) видно, что производная по времени от векторной функции пропорциональна малому параметру — амплитуде начального возмущения при $t=0$, что означает, что $s(t)$ будет медленно меняющейся функцией времени. Для того чтобы в (8а, б) можно было правые части считать малыми величинами, малым должен быть не только параметр a , но и отношение $a/2\sqrt{Tk}$. В случае, для которого приведены графики на рис. 3—4, этот параметр имеет порядок 10^{-1} . Асимптотическое решение системы уравнений для $dA/dt, \dots, dF/dt$ вида (11) построим с помощью метода усреднения [7]. Поскольку методика усреднения детально разработана и хорошо известна, ниже приводятся окончательные результаты расчета.

Рассмотрим два случая, когда при $t=0$ амплитуда колебаний плотности для волн k и $2k$ есть соответственно a и b : $b \approx a$, т. е. взаимодействие развитых волн, и случай $b=0$, т. е. возбуждение волны $2k$ волной k .

В первом случае решение системы уравнений, полученной линеаризацией (8а и б), есть

$$u_{0,k}^{(0)} = 2aA_0 \cos \omega t + aC_0, \quad (12)$$

$$u_{0,2k}^{(0)} = 2bD_0 \cos \Omega t + bF_0,$$

где A_0, C_0 определяются в (10), а D_0 и F_0 можно получить из A_0 и C_0 заменой k на $2k$; $u_{0,2k}^{(0)}$ можно сделать пропорциональным a введением величины $b/a \approx 1$. Выполняя вычисления по методике метода усреднения, получим решение системы (8а и б) с точностью до порядка a^3 в виде

$$u_{0,k}^{(0)} = 2a\bar{A}_0 \cos(\omega - \Delta\omega)t + a\bar{C}_0 + \frac{a^2}{8\omega} \left[\frac{4\omega(\Omega - \omega)}{\Omega(\Omega + \omega)(\Omega + 2\omega)} \times \right.$$

$$\times A_0 D_0 \cos(\Omega + \omega - \Delta\omega)t - \frac{4\omega(\Omega + \omega)}{\Omega(\Omega - \omega)(2\omega - \omega)} A_0 D_0 \cos(\Omega - \omega + \Delta\omega)t + \\ + \frac{5}{\omega} A_0 F_0 \cos(\omega - \Delta\omega)t + \frac{4\omega}{\Omega^2 - \omega^2} C_0 D_0 \cos \Omega t - \frac{2}{\omega} C_0 F_0 \Big], \quad (13)$$

$$u_{0,2k}^{(0)} = 2b\bar{D}_0 \cos \Omega t + b\bar{F}_0 + \frac{a^2}{2\Omega^2} \left[\frac{12\Omega^2}{4\omega^2 - \Omega^2} A_0^2 \cos 2(\omega - \Delta\omega)t - \right. \\ \left. - \frac{24\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} A_0 C_0 \cos(\omega - \Delta\omega)t - 2(2A_0^2 + C_0^2) \right],$$

где

$$\bar{A}_0 \approx A_0 + \frac{b}{8\omega} \left[\frac{12\omega}{4\omega^2 - \Omega^2} A_0 D_0 - \frac{2\omega}{\Omega^2 - \omega^2} C_0 D_0 \right], \\ \bar{C}_0 \approx C_0 + \frac{2b}{\Omega^2 - \omega^2} A_0 D_0, \\ \bar{D}_0 \approx D_0 - \frac{2a(2\omega^2 + \Omega^2)}{\Omega^2} \left[\frac{A^2}{4\omega^2 - \Omega^2} - \frac{A_0 C_0}{\Omega^2 - \omega^2} \right], \quad (14) \\ \bar{F}_0 \approx \frac{b}{a} F_0 + \frac{4a}{\Omega^2} A_0^2, \quad \Delta\omega \approx b \frac{k^2 T}{\omega \Omega^2}.$$

Из (13) и (14) следует, что поправки к частоте Ω волны $2k$ за счет нелинейности в этом приближении нет, а поправка к частоте ω волны k примерно в b раз меньше тепловой поправки к ленгмюровской частоте. Учет нелинейности, таким образом, приводит к появлению колебаний на основных частотах $\omega - \Delta\omega$, Ω и комбинационных частотах $\Omega \pm (\omega - \Delta\omega)$ в каждой из двух взаимодействующих гармоник. Из первой формулы (13) видно, что амплитуда колебаний с частотой $\Omega - \omega$ будет большой, а амплитуды колебаний с частотами $\Omega + \omega$ и $\Omega - \omega$ — малыми.

На рис. 3 показаны кривые, полученные численным интегрированием системы уравнений (6) для рассматриваемых начальных условий. Из рисунка видно, что взаимодействие двух гармоник с малыми амплитудами лишь очень немного искажает гармонические колебания, изменяя значения максимумов и минимумов.

Рассмотрим возбуждение одной волной большой амплитуды с волновым вектором k волны $2k$. В этом случае $b = 0$. Аналогичные проделанные выше вычисления дают следующие выражения для возбужденной волны с точностью до порядка a^3 :

$$u_{0,2k}^{(0)} = a^2 \tilde{D}_0 \cos \Omega t + a^2 \tilde{F}_0 + \frac{2a^2}{\Omega^2} \left[\frac{3\Omega^2}{4\omega^2 - \Omega^2} A_0^2 \cos 2\omega t - \right. \\ \left. - \frac{6\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} A_0 C_0 \cos \omega t - A_0^2 \right], \quad (15)$$

где

$$\tilde{D}_0 \approx \frac{2(2\omega^2 + \Omega^2)}{\Omega^2} \left[\frac{A_0 C_0}{\Omega^2 - \omega^2} - \frac{A_0^2}{4\omega^2 - \Omega^2} \right], \quad (16) \\ \tilde{F}_0 \approx \frac{4A_0^2}{\Omega^2}.$$

Из (15) видно, что амплитуда возбужденной волны пропорциональна a^2 и колебания возбуждаются на собственной частоте «вынуждаю-

щей силы», т. е. основной частоте волны k и удвоенной частоте вынуждающей силы, что хорошо известно (см., например, [8]).

На рис. 4 приведены графики гармоник $k=6\pi$ и $k=8\pi$, возбужденных колебаниями, изображенными на рис. 3. Частоты колебаний рис. 4 видны из формулы (15). Формула (15) качественно хорошо согласуется с кривыми, приведенными на этом рисунке.

Для более подробного приближенного анализа процессов в системе (6) нужно учесть больше величин, например, больше моментов по l для принятия в расчет других частот из линейной теории и пространственно-однородной части («фона») функции распределения, т. е. моментов $u_{l,0}^{(0)}(t)$, в случае наличия в плазме пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kellog P. Phys. Fluids., 8, 102, 1965.
2. Кногг G. Max Planck Institut für Physik und Astrophysik, MPI (PA—14) 63, 1963.
3. Drummond W. E., Pines D. Nucl. Fusion, Suppl., 3, 1049, 1962.
4. Горбунов Л. М., Силин В. П. ЖЭТФ, 47, № 7, 200, 1964.
5. Веденов А. А. Вопросы теории плазмы, вып. 3. М., Атомиздат, 1963.
6. Иорданский С. В. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 60, 1961, стр. 181.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
8. Данелия И. А., Цинцадзе Н. Л. «Изв. вузов», радиофизика, 7, 94, 1964.
9. Denavit I. Phys. Fluids., 8, 471, 1965.
10. Grant F. C., Feix M. R. Phys. Fluids., 10, 696, 1967.
11. Armstrong T. P. Phys. Fluids., 10, 1269, 1967.

Поступила в редакцию
10.10 1967 г.

Кафедра
математики