

В. П. КАНДИДОВ, Л. П. КИМ

**ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ
БАЛОК**

В данной работе рассматривается дискретная механическая модель, состоящая из точечных масс, которые связаны невесомыми отрезками упругих балок. Для системы уравнений, описывающей движение модели, построена фундаментальная система частных решений, которая, подобно системе функций Крылова для непрерывной балки, позволяет легко получать уравнения частот однородных моделей. Для моделей балок с различными краевыми условиями получены зависимости первых четырех собственных частот от числа степеней свободы модели. Произведено сравнение этой модели и упруго-массовой модели с сосредоточенными параметрами.

Для исследования динамики и устойчивости распределенных упругих систем существуют различные приближенные методы. В последнее время широкое развитие получил метод конечных элементов [1—6]. Метод состоит в том, что распределенная система разбивается на элементы конечных размеров. Для описания свойств элемента формулируется ряд упрощающих предположений. В данном случае рассматривается конечный элемент, состоящий из невесомого отрезка упругой балки с точечными массами на концах. В точках соединения конечных элементов накладываются соответствующие условия сопряжения. Построенная таким образом дискретная упруго-массовая модель распределенной системы описывается системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений.

Настоящая работа посвящена применению метода конечных элементов к исследованию колебаний балок с различными условиями закрепления. Проводится сравнение этого метода с конечно-разностным.

Наиболее простой моделью балки является модель с сосредоточенными массами и жесткостями [7]. Уравнение, описывающее поведение этой упруго-массовой модели, может быть получено путем замены частных производных по координатам конечными разностями в уравнении изгибных колебаний непрерывной балки

$$\Delta_n^2 \left(\frac{EI_n}{\Delta x^3} \Delta_n^2 \omega \right) + m_n \ddot{\omega}_n = 0, \quad (1)$$

$n = 0, 1, \dots, N.$

Такая упруго-массовая модель часто применяется в практических расчетах. В частности, эта модель была успешно использована для исследования на АВМ собственных изгибно-крутильных колебаний крыла

самолета [7], для изучения изгибных колебаний стержня, нагруженного осевыми силами [8], а также изгибных колебаний самолета с учетом конечности массы его фюзеляжа и упругости подвески мотора [9].

Упруго-массовая модель балки, построенная методом конечных элементов, изображена на рис. 1. Величина точечных масс вычисляется по формуле

$$m_n = \int_{x_n - \frac{\Delta x_{n-1/2}}{2}}^{x_n + \frac{\Delta x_{n+1/2}}{2}} \rho(x) dx,$$

$$n = 0, 1, \dots, N,$$

где $\rho(x)$ — погонная плотность балки.

Отрезки упругих балок, соединяющие массы, невесомы и однородны. Жесткость на изгиб $EI_{n+1/2}$ принимается равной средней жесткости на соответствующем отрезке исходной балки. Действие всех распределенных нагрузок сводится к действию сосредоточенных сил и моментов

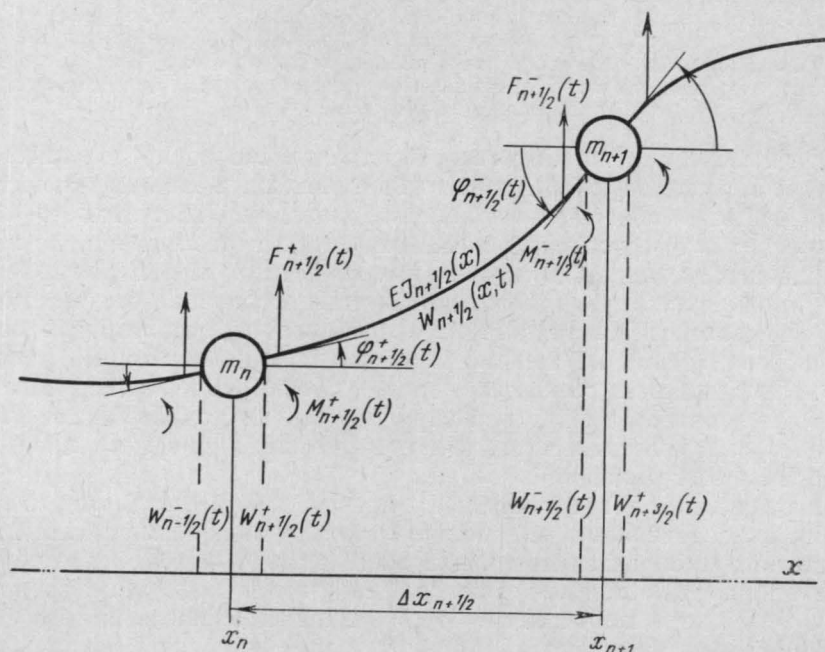


Рис. 1

в точках, где находятся массы. Таким образом, задача определения прогиба балки, представленной этой упруго-массовой моделью, как в случае статической деформации, так и в случае динамической, сводится к определению прогибов ряда элементарных балок (Э.Б.) под действием сил и моментов, приложенных на их концах. Такая модель известна в зарубежной литературе как «модель Майклстеда» [10].

Форма прогиба Э. Б. удовлетворяет уравнению статической деформации:

$$\frac{\partial^4 \omega_{n+1/2}(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad (2)$$

$$n = 0, 1, \dots, N,$$

где $\omega_{n+1/2}(x, t)$ — прогиб Э. Б., заключенный между n -ной и $(n+1)$ -ной массами. Общее решение этого уравнения имеет вид полинома третьей степени. Для однозначного определения коэффициентов этого полинома должны быть заданы четыре из следующих восьми величин (смещений, углов наклона, перерезывающих сил и изгибающих моментов на концах Э. Б.):

$$\begin{aligned} & \omega_{n+1/2}^+(t), \quad \omega_{n+1/2}^-(t), \quad \varphi_{n+1/2}^+(t), \quad \varphi_{n+1/2}^-(t), \\ & F_{n+1/2}^+(t), \quad F_{n+1/2}^-(t), \quad M_{n+1/2}^+(t), \quad M_{n+1/2}^-(t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$n = 0, 1, \dots, N.$$

Заданные четыре величины будут являться обобщенными координатами деформированной Э. Б. Эти величины образуют вектор обобщенных координат $\vec{Z}_{n+1/2}(t)$. Оставшиеся величины из (3) образуют вектор обобщенных сил $\vec{P}_{n+1/2}(t)$. Выбор обобщенных координат из (3) в значительной мере произволен и определяется в первую очередь удобством анализа рассматриваемой задачи.

Запишем вектор обобщенных координат в виде

$$\vec{Z}_{n+1/2}(t) = \{ \omega_{n+1/2}^-(t), \quad \omega_{n+1/2}^+(t), \quad \Delta x_{n+1/2} \varphi_{n+1/2}^-(t), \quad \Delta x_{n+1/2} \varphi_{n+1/2}^+(t) \}.$$

Тогда вектор обобщенных сил будет

$$\vec{P}_{n+1/2}(t) = \left\{ F_{n+1/2}^+(t), \quad F_{n+1/2}^-(t), \quad \frac{M_{n+1/2}^+(t)}{\Delta x_{n+1/2}}, \quad \frac{M_{n+1/2}^-(t)}{\Delta x_{n+1/2}} \right\}.$$

Из решения уравнения (2) можно получить связь между векторами

$$\vec{Z}_{n+1/2}(t) \text{ и } \vec{P}_{n+1/2}(t):$$

$$\vec{P}_{n+1/2}(t) = G_{n+1/2} \vec{Z}_{n+1/2}(t), \quad (4)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

$G_{n+1/2}$ — матрица жесткости, элементы которой зависят только от размеров и жесткости соответствующей Э. Б.

Условия сопряжения, связывающие координаты векторов $\vec{Z}_{n+1/2}(t)$ и $\vec{P}_{n+1/2}(t)$ соседних Э. Б., следующие:

1. Непрерывность смещения

$$\omega_{n+1/2}^-(t) = \omega_{n+3/2}^+(t) = \omega_{n+1}(t),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

2. Непрерывность угла наклона

$$\varphi_{n+1/2}^-(t) = \varphi_{n+3/2}^+(t) = \varphi_{n+1}(t),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

3. Сумма изгибающих моментов равна внешнему сосредоточенному моменту $M_{\text{вн.}n}$:

$$M_{n-1/2}^-(t) + M_{n+1/2}^+(t) = M_{\text{вн.}n}, \\ n = 0, 1, \dots, N.$$

4. Сумма сил, приложенных к Э. Б. в общей точке x_n , равна сумме всех сил, действующих в соответствующей точке:

$$F_{n-1/2}^-(t) + F_{n+1/2}^+(t) = Q_n(t) - m_n \ddot{w}_n(t), \\ n = 0, 1, \dots, N,$$

где $Q_n(t)$ — внешняя сосредоточенная нагрузка.

Уравнение (4) совместно с условиями сопряжения и граничными условиями является математическим описанием упруго-массовой модели, построенной методом конечных элементов. Эта система уравнений может быть решена с помощью ЦВМ и АВМ. Некоторый анализ описанной упруго-массовой модели и ряда других моделей балки проведен в работе [2].

Точное аналитическое исследование уравнений можно провести только для однородной упруго-массовой модели, когда жесткости всех Э. Б. равны между собой и длины их одинаковы. В этом случае, используя явный вид матрицы жесткости Э. Б., можно записать систему уравнений, описывающую движение модели

$$\frac{EI}{\Delta x^3} \Delta_n^4 w + \frac{1}{6} \Delta_n^2 (m \ddot{w}) + m_n \ddot{w}_n = 0, \quad (5) \\ n = 0, 1, \dots, N.$$

Общее решение уравнения (5) представляет собой линейную комбинацию функций дискретного аргумента $\cos \kappa \Delta x n$, $\sin \kappa \Delta x n$, $\text{ch } k \Delta x n$ и $\text{sh } k \Delta x n$; $\kappa \Delta x$ и $k \Delta x$ являются корнями частотного уравнения модели балки с определенными краевыми условиями. Частоты модели определяются по формуле

$$\omega^2 = \frac{\lambda^2}{\Delta x^4} \left(2 \sin \frac{\kappa \Delta x}{2} \right)^2 \frac{3}{2 + \cos \kappa \Delta x} = \\ = \frac{\lambda^2}{\Delta x^4} \left(2 \text{sh} \frac{k \Delta x}{2} \right)^2 \frac{3}{2 + \text{ch } k \Delta x},$$

где

$$\lambda^2 = \frac{EI}{\rho}.$$

Для получения частотных уравнений моделей с различными краевыми условиями удобно перейти к другой фундаментальной системе частных решений $S(n\Delta x)$, $T(n\Delta x)$, $U(n\Delta x)$ и $V(n\Delta x)$. Функции дискретного аргумента вводятся при следующих условиях: 1) если функция прогиба совпадает с $S(n\Delta x)$, то смещение на левом конце модели равно 1, а «угол», «момент» и «сила» на этом конце равны нулю, и 2) если функция прогиба совпадает с $T(n\Delta x)$, то на левом конце «угол» $\Delta x \varphi_0$ равен 1, а смещение, «момент» и «сила» — нулю и т. д.

Символически эти требования можно записать так:

$$\omega_0 \quad \Delta x \varphi_0 \quad \frac{\Delta x^2}{EI} M_0^- \quad \frac{\Delta x^3}{EI} F_0^-$$

$S(n \Delta x)$	1	0	0	0
$T(n \Delta x)$	0	1	0	0
$U(n \Delta x)$	0	0	1	0
$V(n \Delta x)$	0	0	0	1

Функции $S(n \Delta x)$, $T(n \Delta x)$, $U(n \Delta x)$ и $V(n \Delta x)$ подобны функциям Крылова для непрерывной балки [11]. Введенные функции имеют вид

$$S(n \Delta x) = R \left[\frac{1}{\left(\sin \frac{\kappa \Delta x}{2} \right)^2} \operatorname{ch} k \Delta x n + \frac{1}{\left(\operatorname{sh} \frac{k \Delta x}{2} \right)^2} \cos \kappa \Delta x n \right],$$

$$T(n \Delta x) = R \left[2 \operatorname{th} \frac{k \Delta x}{2} \sin k \Delta x n + 2 \operatorname{tg} \frac{\kappa \Delta x}{2} \sin \kappa \Delta x n \right],$$

$$U(n \Delta x) = R [\operatorname{sh} k \Delta x n - \cos \kappa \Delta x n],$$

$$V(n \Delta x) = R \left[\frac{\operatorname{th} \frac{k \Delta x}{2}}{\left(2 \sin \frac{\kappa \Delta x}{2} \right)^2} \operatorname{sh} k \Delta x n - \frac{\operatorname{tg} \frac{\kappa \Delta x}{2}}{\left(2 \operatorname{sh} \frac{k \Delta x}{2} \right)^2} \sin \kappa \Delta x n \right], \quad (6)$$

$$R = \frac{1}{p} \frac{\left(2 \operatorname{sh} \frac{k \Delta x}{2} \right)^2 \left(2 \sin \frac{\kappa \Delta x}{2} \right)^2}{\left(2 \operatorname{sh} \frac{k \Delta x}{2} \right)^2 + \left(2 \sin \frac{\kappa \Delta x}{2} \right)^2},$$

$$p = \frac{\omega^2}{\lambda^2 / \Delta x^4}.$$

С помощью этих функций легко получить частотное уравнение для однородной упруго-массовой модели при различных краевых условиях. Так, для балки, опертой с обоих концов, оно имеет вид $\sin \kappa \Delta x N = 0$, а для консольной балки равно

$$\operatorname{ch} k \Delta x N \cos \kappa \Delta x N \left[\left(\frac{\sin \frac{\kappa \Delta x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{k \Delta x}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{k \Delta x}{2}}{\sin \frac{\kappa \Delta x}{2}} \right)^2 \right] +$$

$$+ 2 \operatorname{sh} k \Delta x N \sin \kappa \Delta x N \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\kappa \Delta x}{2}}{\operatorname{th} \frac{k \Delta x}{2}} - \frac{\operatorname{th} \frac{k \Delta x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\kappa \Delta x}{2}} \right) = 0$$

и т. д.

При $N \rightarrow \infty$ частотные уравнения переходят в соответствующие уравнения частот для непрерывной балки.

Полученные частотные уравнения были решены при $N=3, 4, 5, 6, 8, 10$. По найденным первым четырем корням вычислены приведенные частоты упруго-массовой модели α_i , определяемые формулой

$$\alpha_i = \frac{\omega_i}{\lambda/L^2} = \sqrt{\rho_i} N,$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Приведенная частота равна частоте балки единичной длины, с единичной жесткостью и плотностью. Для непрерывной балки приведенная частота совпадает с квадратом корня частотного уравнения.

Чтобы сравнить рассматриваемую модель с конечно-разностной, были найдены при тех же значениях N приведенные частоты однородной конечно-разностной модели

$$\alpha_i = \frac{\omega_i}{\lambda/L^2} = \sqrt{\rho_i} N,$$

$$\rho_i = \left(4 \sin^2 \frac{\kappa \Delta x}{2} \right)^2 = \left(4 \operatorname{sh}^2 \frac{k \Delta x}{2} \right)^2,$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Приведем уравнения частот для модели с сосредоточенными параметрами.

Для опертой балки $\sin \kappa \Delta x N = 0$.

Для консольной балки

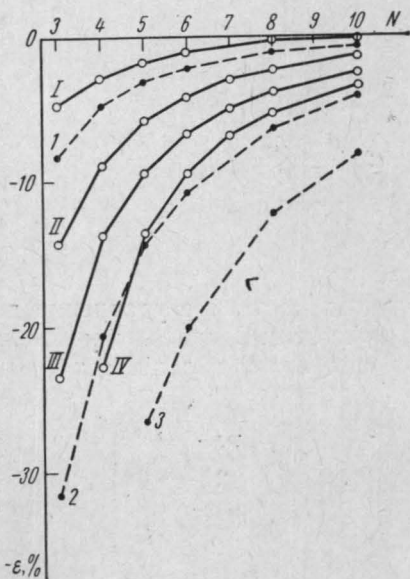


Рис. 2

приведенных частот непрерывной балки. Сплошной линией соединены точки, относящиеся к упруго-массовой модели, построенной методом конечных элементов; пунктиром — к конечно-разностной модели.

Из анализа графика следует, что относительное отклонение приведенных частот модели из конечных элементов с ростом N убывает приблизительно как $1/N^4$, причем при N близких к номеру тона $[i < N \ll$

$$\cos \kappa \Delta x N \cdot \operatorname{ch} k \Delta x N + 1 - \frac{1}{2} \sin \kappa \Delta x N \operatorname{sh} k \Delta x N \times$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{k \Delta x}{2}}{\cos \frac{\kappa \Delta x}{2}} - \frac{\cos \frac{\kappa \Delta x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{k \Delta x}{2}} \right) = 0$$

и т. д.

Для получения этих уравнений также удобно ввести соответствующую систему фундаментальных решений уравнений (1), подобных (6).

На рис. 2 представлены результаты сравнения приведенных частот обеих моделей на примере опертой балки. По оси абсцисс отложено (N) число разбиений в упруго-массовых моделях. По оси ординат — отклонение в процентах приведенных частот моделей от соответствующих

$\leq 2-3$] убывание происходит быстрее, чем $1/N^5$; для конечно-разностной модели относительное отклонение с ростом N убывает приблизительно как $1/N^2$. Относительное отклонение первой приведенной частоты модели из конечных элементов на два порядка ниже, чем соответствующее отклонение конечно-разностной модели при одном и том же числе степеней свободы. У модели из конечных элементов с $N \geq 4$ относительное отклонение первых трех приведенных частот становится меньше отклонения первой приведенной частоты для конечно-разностной модели с тем же числом N .

Аналогичные выводы могут быть сделаны и для других условий закрепления. В табл. 1 приведены численные результаты исследования частотного уравнения для консольной балки.

Из полученных результатов следует, что для воспроизведения первых двух тонов однородной балки с точностью до 2% необходимо в

Таблица 1

Консольная балка

№ тона	Приведенная частота (α_i) непрерывной балки	Приведенная частота (α_i) упруго-массовой модели Майклстеда	Относительная ошибка, — ε %	Приведенная частота (α_i) конечно-разностной модели	Относительная ошибка, — ε %
$N = 3$					
1	3,516	3,346	4,82	3,226	8,23
2	22,03	18,87	14,4	15,06	31,7
3	61,70	47,28	23,4	29,91	51,5
$N = 4$					
1	3,516	3,415	2,86	3,344	4,88
2	22,03	20,06	3,97	17,49	20,6
3	61,70	53,20	18,8	39,27	36,4
4	120,9	93,47	22,7	57,15	52,7
$N = 5$					
1	3,516	3,452	1,82	3,406	3,12
2	22,03	20,74	5,89	18,87	14,4
3	61,70	55,94	9,33	45,35	26,5
4	120,9	104,4	13,7	72,46	40,1
$N = 6$					
1	3,516	3,473	1,21	3,434	2,32
2	22,03	21,10	4,22	19,67	10,7
3	61,70	57,55	6,73	49,35	20,0
4	120,9	109,5	9,46	83,39	31,0
$N = 8$					
1	3,516	3,495	0,60	3,471	1,27
2	22,03	21,51	2,40	20,63	6,37
3	61,70	59,28	3,93	54,07	12,4
4	120,9	114,3	5,43	96,93	19,8
$N = 10$					
1	3,516	3,498	0,51	3,487	0,81
2	22,03	21,69	1,54	21,13	4,12

упруго-массовых моделях взять число разбиений N не меньше, чем указано в табл. 2. Из табл. 2 видно, что для достижения заданной точности модель из конечных элементов должна содержать значительно меньше элементов разбиения, чем конечно-разностная. Заметим, что модель из конечных элементов реализует условие свободного конца несколько хуже, чем другие краевые условия. Изменяя модель и запись краевого условия для ее свободного конца, можно улучшить аппроксимацию балки со свободными концами.

Таблица 2

Условия закрепления концов	Модель из конечных элементов	Конечно-разностная модель
	(N)	(N)
Опертые оба конца	5	~20
Один защемлен, другой оперт	5	~25
Оба защемленные	5	~30
Консоль	8	~12
Свободные оба конца	~12	~35

Проведенный анализ однородных упруго-массовых моделей позволяет получить некоторые рекомендации при аппроксимации конкретных балочных конструкций с заданной точностью.

Рассмотренная дискретная модель была использована для определения собственных частот колебаний консольного клина. Значение первой частоты, найденное с помощью АВМ, отличалось на 6% от частоты, найденной по методу Ритца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melosch R. JASS, 28, No. 1, 1961.
2. Leckie F. A., Lindberg G. M. The Aeronautical Quarterly, 14, No. 3, 1963.
3. Zienkiewicz O. C., Cheung G. K. Proc. Inst. civ. Engrs., 28, 471—488, 1964.
4. Fanelli M. Energia-elettrica, No. 6, 41, 1964.
5. Dawe D. J. J. Mech. Sci., 7, No. 1, 28—32, 1965.
6. Кандидов В. П. Реферат канд. диссертации. МГУ, 1965.
7. Орданович А. Е. Реферат канд. диссертации. МГУ, 1959.
8. Баранов А. В., Кандидов В. П., Орданович А. Е. Применение электронного моделирования для исследования поперечных колебаний стержня с осевыми нагрузками. Доклад на IV Межвузовской конференции по применению физ. и мат. моделирования, сб. 3. МЭИ, 1962, стр. 153—162.
9. Баранов А. В., Кандидов В. П., Орданович А. Е. Исследование упругих колебаний самолета на электронной модели. Доклад на IV Межвузовской конференции по применению физ. и мат. моделирования, сб. 3. МЭИ, 1962, стр. 141—152.
10. Mjklestad N. O. Vibration analysis. chapter 8., Mc. Graw-Hill book Co. Inc. New York, 1956, pp. 244—247.
11. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1962.

Поступила в редакцию
20.11 1967 г.

Кафедра
общей физики для мехмата