

УДК 538.3:538.56.029.64—517.9:535.4

А. С. ИЛЬИНСКИЙ, В. В. КРАВЦОВ, А. Г. СВЕШНИКОВ

## МЕТОД ГАЛЕРКИНА В ЗАДАЧАХ О РАССЕЯНИИ ВОЛН В ПОЛЫХ СИСТЕМАХ

Метод Галеркина применяется для расчета широкого класса направляющих систем с идеальными или хорошо проводящими включениями. Доказана сходимость метода. Этот метод позволяет определить матрицу рассеяния в направляющей системе и построить функцию Грина.

Метод Галеркина получил широкое распространение в задачах об исследовании нерегулярных волноводов и волноводных трансформаторов [1—3]. Данный метод позволяет единообразно исследовать различные задачи электродинамики полых систем. Наиболее целесообразно применять метод Галеркина в тех случаях, когда изучаются интегральные характеристики поля. В настоящее время проекционные методы применяются для исследования полых систем с различными неоднородными, анизотропными средами. В настоящей работе предлагается метод расчета широкого класса полых систем с идеально или хорошо проводящими включениями. Эта работа является дальнейшим развитием идей метода Галеркина.

Будем рассматривать задачу определения матрицы рассеяния и дифракционного поля в системе, представленной на рис. 1. Согласно установившейся традиции [3], будем называть эту область волноводным трансформатором. Он представляет собой полость  $D_0$  с несколькими присоединенными регулярными волноводами  $D_j$ . Поверхность полости вне волноводов обозначим через  $S_0$ , сечения регулярных волноводов через  $S_j$ , боковую поверхность регулярных волноводов  $\sigma_j$ . Внутри области  $D_0$  помещено тело  $D$  с границей  $S$ . Будем считать стенки регулярных волноводов идеально проводящими, и пусть поверхности  $S_0$  и  $S$  обладают настолько большой проводимостью, что на них выполняются импендансные граничные условия. Рассмотрим скалярную задачу дифракции. Будем считать, что на сечение  $S_{j_0}$  падает нормальная

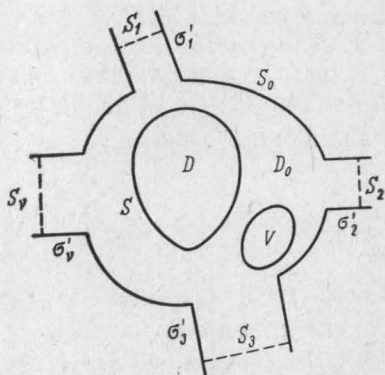


Рис. 1

волна номера  $m_0$   $j_0$ -того регулярного волновода. В этом случае скалярная задача ставится следующим образом. Решаем в области  $D' = D_0 - D$ , ограниченной поверхностями  $S_0, S, S_j$ , уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_{S_0+S} = 0, \quad (2)$$

$$\iint_{S_j} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + i\gamma_m^j u \right) \varphi_m^j ds = 2i\gamma_{m_0}^{j_0} A \delta_{mm_0} \delta_{jj_0}. \quad (3)$$

Здесь  $\varphi_m^j$  — система мембранных функций сечения  $S_j$ , удовлетворяющая соответствующим условиям на контуре поперечного сечения  $S_j$ ;  $\gamma_m^j$  — постоянные распространения волн вдоль  $j$ -того волновода;  $A$  — амплитуда падающей волны номера  $m_0$  в сечении  $S_{j_0}$  ( $Im\gamma_{m_0}^{j_0} = 0$ ). Условия (3) суть парциальные условия излучения [4], обеспечивающие единственность решения поставленной задачи (1) — (3).

Будем считать, что решение поставленной задачи существует. Нашей задачей является построение алгоритма приближенного решения и обоснование сходимости такого алгоритма. Для построения такого алгоритма введем систему функций  $V_n(M)$ , определенную всюду в замкнутой области  $\bar{D}'$ , удовлетворяющую в  $D_0$  уравнению

$$\Delta V_n + k^2 V_n = 0 \quad (4)$$

и полную на поверхности  $S_0 + S + \sum_j S_j$ . (Эту систему можно, например, построить, основываясь на методах, предложенных И. Н. Векуа [5] и В. Д. Купрадзе [6].)

Для построения приближенного решения нам потребуется ряд свойств решения задачи (1) — (3). Прежде всего отметим, что решение  $u$  задачи (1) — (3) разлагается в ряд по системе функций  $V_n(M)$ , сходящийся в  $\bar{D}'$ :

$$u(M) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n V_n(M). \quad (5)$$

Кроме того, в каждом сечении  $S_j$   $u$  разлагается в равномерно сходящийся ряд по системе функций  $\varphi_m^j$

$$u|_{S_j} = \sum_m a_m^j \varphi_m^j. \quad (6)$$

В силу полноты системы функций  $\varphi_m^j$  в каждом сечении  $S_j$  для функции  $V_n(M)$  можно записать следующее представление:

$$V_n|_{S_j} = \sum_m \alpha_{nm}^j \varphi_m^j, \quad (7)$$

при этом из (5) следует, что

$$a_m^j = \sum_n \alpha_{nm}^j C_n. \quad (8)$$

Для  $u$  в силу условий (1) — (3) выполняются следующие интегральные соотношения:

$$\iiint_{D'} (\Delta u + k^2 u) u^* dV = 0 \quad (9)$$

и

$$\iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \frac{\partial u}{\partial n} u^* ds = - \iint_{S_0+S} h |u|^2 - ds i \sum_{m,j} \gamma_m^j |a_m^j|^2 + 2a_{m_0}^{*j_0} i \gamma_{m_0}^{j_0} A. \quad (10)$$

Применяя формулу Грина, легко получить следующее энергетическое соотношение, которому удовлетворяет функция  $u$ :

$$\operatorname{Re} \sum \gamma_m^j |a_m^j|^2 + \gamma_{m_0}^{j_0} |a_{m_0}^{j_0} - A|^2 + \operatorname{Im} \iint_{S_0+S} h |u|^2 ds = \gamma_{m_0}^{j_0} |A|^2. \quad (11)$$

Парциальные условия излучения (3) удобно переписать таким образом, чтобы в них непосредственно участвовали функции  $V_n$ . Умножая соотношение (3) на  $a_{nm}^{*j}$  и суммируя по  $m$ , получим соотношение

$$\iint_{S_j} \frac{\partial u}{\partial n} V_n^* \Big|_{S_j} ds = -i \sum \gamma_m^j \alpha_{nm}^* \alpha_m^j + 2i \gamma_{m_0}^{j_0} \alpha_{nm_0}^{*j_0} \delta_{jj_0}. \quad (12)$$

Соотношения (12) и (10) подсказывают форму построения приближенного решения задачи (1) — (3).

Будем искать приближенное решение задачи (1) — (3) в виде конечной суммы

$$u_N = \sum_{n=1}^N c_n^N V_n(M). \quad (13)$$

При этом приближенное решение  $u_N$  удовлетворяет уравнению (1). Для определения коэффициентов  $c_n^N$  потребуем, чтобы для приближенного решения  $u_N$  выполнялись для всех  $n = 1 \dots N$  следующие соотношения:

$$\iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \frac{\partial u_N}{\partial n} V_n^* ds = -i \sum_{j,m} \gamma_m^j \alpha_m^{Nj} \alpha_{nm}^{*j} - \iint_{S_0+S} h u_N^* ds + 2i \gamma_{m_0}^{j_0} \alpha_{nm_0}^{*j_0}, \quad (14)$$

где  $\alpha_m^{Nj}$  есть коэффициенты разложения функции  $u_N$  по системе функций  $\varphi_m^j$  в сечении  $S_j$ , т. е.

$$u_N = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{Nj} \varphi_m^j, \quad (15)$$

при этом

$$\alpha_m^{Nj} = \sum_{n=1}^N \alpha_{nm}^j c_n^N. \quad (16)$$

Соотношение (14) эквивалентно выполнению краевых условий на граничных поверхностях в обобщенном интегральном смысле и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $c_n^N$  ( $n = 1 \dots N$ ). Соотношение (14) позволяет получить основное энергетическое соотношение и для  $u_N$  в форме, аналогичной соотношению (11).

Действительно, умножая (14) на  $c_n^{N*}$  и суммируя по  $n$  от 1 до  $N$ , получим

$$\iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \frac{\partial u_N}{\partial n} u_N^* ds = - \iint_{S_0+S} h |u_N|^2 ds - i \sum_{mj} \gamma_m^j |a_m^{jN}|^2 + 2ia_{m0}^{*j0N} \gamma_{m0}^{j0} A. \quad (17)$$

Из соотношения (17) и следует выполнение соотношения (11) для  $u_N$ .

Соотношение (11), справедливое как для  $u$  так и для  $u_N$ , позволяет установить сходимость  $u_N$  к  $u$ . Действительно, рассмотрим разность

$$\omega_N = u - u_N. \quad (18)$$

Для  $\omega_N$  справедливы следующие соотношения:

$$\Delta \omega_N + k^2 \omega_N = 0, \quad (19)$$

$$\omega_N = \sum_{n=1}^{\infty} d_n V_n, \quad (20)$$

где

$$d_n = \begin{cases} c_n - c_n^N & n = 1 \dots N \\ c_n & n = N + 1, \dots \end{cases} \quad (21)$$

В любом сечении  $S_j$  функцию  $\omega_N$  можно представить в виде разложения по  $\Phi_m^j$ :

$$\omega_N|_{S_j} = \sum_m^{\infty} b_m^j \Phi_m^j, \quad (22)$$

причем

$$b_m^j = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nm}^j d_n = a_m^j - a_m^{jN}. \quad (23)$$

Обозначим

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n V_n(M) = \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n V_n. \quad (24)$$

Используя соотношения (12) и (14), для функции  $\omega_N$  получим

$$\iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \frac{\partial \omega_N}{\partial n} V_n^* ds = \begin{cases} - \iint_{S_0+S} h \omega_N V_N^* ds - i \sum_{m,j} \gamma_m^j b_m^j \alpha_{nm}^{j*}, & n = 1, \dots, N, \\ - \iint_{S_0+S} h \omega_N V_N^* ds - i \sum_{m,j} \gamma_m^j a_m^j \alpha_{nm}^{j*} - \\ - \iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \frac{\partial u_N}{\partial n} V_n^* ds, & n = N + 1, \dots \end{cases}$$

Умножая (25) на  $a_n^*$  и суммируя по  $n$ , получим

$$\iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \frac{\partial \omega_N}{\partial n} \omega_N^* ds = - \iint_{S_0+S} h |\omega_N|^2 ds - \iint_{S_0+S} hu_N R_N^* ds -$$

$$- i \sum_{m,j} \gamma_m^j |b_m^j|^2 - i \sum_{m,j} \gamma_m^j a_m^{jN} \sum_{n=N+1} \alpha_{nm}^* a_n^* - \iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \frac{\partial u_N}{\partial n} R_N^* ds. \quad (26)$$

Применяя к  $\omega$  и  $\omega_N$  формулу Грина, получим энергетическое соотношение

$$\operatorname{Re} \sum_{m,j} \gamma_m^j |b_m^j|^2 + I_m \iint_{S_0+S} h |\omega_N|^2 ds = \operatorname{Re} \sum_{m,j} (\gamma_m^j a_m^{jN} \tilde{b}_m^{j*} - \gamma_m^{j*} a_m^{jN} \tilde{b}_m^j) +$$

$$+ \operatorname{Im} \iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \left( \frac{\partial u_N}{\partial n} R_N^* - \frac{\partial u_N^*}{\partial n} R_N \right) ds, \quad (27)$$

где  $\tilde{b}_m^j = \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_{im}^j C_i$  есть коэффициент разложения  $R_N|_{S_j} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{b}_m^j \Phi_m^j$  остатка ряда (5) в сечении  $S_j$ .

Левая часть соотношения (27) стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Это означает, что  $a_m^{jN}$  стремится к  $a_m^j$  при  $N \rightarrow \infty$  и  $u_N$  в среднем сходится к  $u$ .

Таким образом, задача исследования сложной волноводной системы сведена к системе линейных алгебраических уравнений, для решения которых предложено много эффективных методов, в том числе и для систем повышенного порядка.

В заключение отметим, что аналогичные уравнения могут быть получены также и в том случае, когда на поверхности  $S_0$  или  $S$  заданы неоднородные краевые условия  $\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_{S_0+S} = f(P)$ . В этом случае основные Галеркинские соотношения имеют следующий вид:

$$\iint_{S_0+S+\sum_j S_j} \frac{\partial u_N}{\partial n} V_n ds = - i \sum_{jm} \gamma_m^j a_m^{jN} \alpha_{n,m}^{*j} - \iint_{S_0+S} (hu_N - f(P)) V_n^* ds +$$

$$+ 2i \gamma_{m_0}^{j_0} \alpha_{n_0}^{*j_0} \delta_{j_0}.$$

При этом вновь можно провести доказательство сходимости  $u_N$  к  $u$  и сходимости соответствующих элементов матрицы рассеяния.

Можно рассматривать также и задачу о возбуждении волноводного трансформатора произвольным распределением источников, расположенных в области  $D'$ . При этом решение задачи можно искать в виде объемного потенциала плюс регулярная функция, удовлетворяющая неоднородным условиям на границе области  $D'$ . Тем самым данный метод можно использовать для построения функции Грина волно-

водного трансформатора. Для этого достаточно представить функцию Грина  $G(M, P)$  в виде суммы

$$G(M, P) = \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} + \omega(M, P).$$

Функция  $\omega(M, P)$  — это регулярная в  $D'$  функция, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям на поверхности области  $D'$ .

Метод, изложенный для скалярного случая, легко обобщается на случай уравнений Максвелла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г. «Журн. вычислит. матем. и матем. физики», 3, № 1, 1963.
2. Ильинский А. С., Котик И. П., Свешников А. Г. Сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 3. Изд-во МГУ, 1963.
3. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М., «Наука», 1967.
4. Свешников А. Г. ДАН СССР, 80, 3, 1951.
5. Векуа И. Н. ДАН СССР, 90, 715—718, 1953.
6. Купрадзе В. Д. «Успехи матем. наук», т. 23, 2(34), 59—108, 1967.

Поступила в редакцию  
30.11 1967 г.

Кафедра  
математики