Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1968

УДК 538.3:621.372.853.1

ПАК КВАН ИР

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассматривается задача о распространении электромагнитных волн через цилиндрический волновод, вдоль оси которого помещен плазменный шнур, при отсутствии постоянного магнитного поля.

Введение

В известных работах Хана [1] и в особенности Рамо [2] развита теория распространения электромагнитных волн через цилиндрический плазменный волновод. С тех пор этому вопросу посвящено не мало работ. Но в них недостаточно уделяется внимание волнам поверхностных зарядов, характерным для плазмы со свободной границей. Обычно ограничиваются рассмотрением волн поверхностных зарядов электромеханической природы, связанных с так называемыми замедленными поверхностными колебаниями [3]. Однако поскольку поверхностные заряды возникают под действием электромагнитных волн, то обычные волноводные типы колебаний также должны сопровождаться волнами поверхностных зарядов. Вопрос полного выяснения их роли в процессе распространения электромагнитных волн в плазменном волноводе до сих пор остается открытым.

Кроме того, теория Рамо, которая считается классической, при отсутствии бесконечно большого постоянного магнитного поля таит в себе внутреннее противоречие принципиального характера, т. е. противоречие, задевающее основы его теории. Дело в том, что в случае полного заполнения плазмой на поверхности волновода должны обратиться в нуль не только тангенциальные составляющие электрического поля, а еще нормальная составляющая скорости электрона. Это последнее условие приводит к переопределенности граничной задачи, что равносильно ее неразрешимости.

В данной статье для конкретной модели плазмы строится последовательная теория распространения электромагнитных волн через цилиндрический плазменный волновод и выясняется при этом роль волн поверхностных зарядов. Плазма считается в основном неподвижной и несжимаемой. Учет сжимаемости для поверхностных колебаний является только нелинейным эффектом и в излагаемой линейной теории его не надо учитывать. Движением ионов и эффектом столкновений пренебрегаем. Описание ведется в гидродинамическом приближении на основе совместного решения уравнения движения и уравнений Максвелла при отсутствии внешнего постоянного магнитного поля.

Исходные уравнения

В исходную систему, описывающую нашу модель плазмы, кроме уравнений Максвелла войдет еще уравнение движения, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\,\vec{v} = \frac{q_0^-}{\rho_0}\vec{E}, \tag{1}$$

где $q_0^- = -eN_0^-$ есть плотность заряда электронной жидкости (N_0^- — концентрация электронов в плазме), $\rho_0 = mN_0^-$ есть ее материальная плотность.

Линеаризуя уравнение (1), можем допустить малость скорости $\vec{v}$. В этом случае член $(\vec{v}\nabla)\,\vec{v}$ будет малой величиной второго порядка и им можно пренебречь. Итак, исходная система уравнений запишется:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{q_0^-}{\rho_0}\vec{E},\\
rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}q_0^-\vec{v},\\
rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},\\
div\vec{H} = 0,\\
div\vec{E} = 4\pi\,(q_0^- + q_0^+),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $q_0^+ = eN_0^+$ есть плотность заряда положительной жидкости (N_0^+ — концентрация ионов).

Квазинейтральность плазмы требует равенства $N_0^- = N_0^+$. Поэтому внутри несжимаемой плазмы фактически источник заряда отсутствует. Зато на ее поверхности за счет выпирания электронной жидкости через свободную границу образуется слой поверхностных зарядов, что приводит к отличной от нуля поверхностной дивергенции

$$Div\vec{E} = 4\pi q_0^-\,\delta r, \tag{3}$$

где δr — смещение поверхности электронной жидкости от равновесного положения. Для описания поля вне плазмы достаточно написать уравнения Максвелла без источников:

$$\begin{aligned}
rot\,\vec{H}' &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}, & div\,\vec{H}' &= 0,\\
rot\,\vec{E}' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}'}{\partial t}, & div\,\vec{E}' &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Буквы со штрихами означают величины во внешней среде.

В цилиндрических координатах все величины запишем в виде

$$g = g(r) \cdot e^{i(\omega t + n\varphi - kz)},$$

для волноводных типов колебаний получим следующие решения:

$$E_r = \left[-\frac{ik}{\eta} E_0 J'_n(\eta r) + \frac{n\omega}{c\eta^2 r} H_0 J_n(\eta r) \right] \cdot \Phi,$$

$$E_\varphi = \left[\frac{nk}{\eta^2 r} E_0 J_n(\eta r) + \frac{j\omega}{c\eta} H_0 J'_n(\eta r) \right] \cdot \Phi,$$

$$E_z = F_0 J_n(\eta r) \cdot \Phi,$$

$$v_r = \left[\frac{ek}{m\omega\eta} E_0 J'_n(\eta r) + \frac{ien}{mc\eta^2 r} H_0 J_n(\eta r) \right] \cdot \Phi,$$

$$v_\varphi = \left[\frac{ienk}{m\omega\eta^2 r} E_0 J_n(\eta r) - \frac{e}{mc\eta} H_0 J'_n(\eta r) \right] \cdot \Phi,$$

$$v_z = \frac{ie}{m\omega} E_0 J_n(\eta r) \cdot \Phi,$$

$$H_r = \left[-\frac{n(\omega^2 - \omega_0^2)}{c\omega\eta^2 r} E_0 J_n(\eta r) - \frac{ik}{\eta} H_0 J'_n(\eta r) \right] \cdot \Phi,$$

$$H_\varphi = \left[-\frac{i(\omega^2 - \omega_0^2)}{c\omega\eta} E_0 J'_n(\eta r) + \frac{nk}{\eta^2 r} H_0 J_n(\eta r) \right] \cdot \Phi,$$

$$H_z = H_0 J_n(\eta r) \cdot \Phi;$$

внутри плазмы и такие решения:

$$E'_r = \left[-\frac{ik}{\eta'} (\mathcal{E}'_0 J'_n(\eta' r) + E'_0 N'_n(\eta' r)) + \frac{n\omega}{c\eta'^2 r} (\mathcal{H}'_0 J_n(\eta' r) + H'_0 N_n(\eta' r)) \right] \cdot \Phi.$$

$$E'_\varphi = \left[\frac{nk}{\eta'^2 r} (\mathcal{E}'_0 J_n(\eta' r) + E'_0 N_n(\eta' r)) + \frac{i\omega}{c\eta} (\mathcal{H}'_0 J'_n(\eta' r) + H'_0 N'_n(\eta' r)) \right] \cdot \Phi,$$

$$E'_z = (\mathcal{E}'_0 J_n(\eta' r) + E'_0 N_n(\eta' r)) \cdot \Phi.$$

$$H'_r = \left[-\frac{n\omega}{c\eta'^2 r} (\mathcal{E}'_0 J_n(\eta' r) + E'_0 N_n(\eta' r)) - \frac{ik}{\eta'} (\mathcal{H}'_0 J'_n(\eta' r) + H'_0 N'_n(\eta' r)) \right] \cdot \Phi,$$

$$H'_\varphi = \left[-\frac{i\omega}{c\eta'} (\mathcal{E}'_0 J'_n(\eta' r) + E'_0 N'_n(\eta' r)) + \frac{nk}{\eta'^2 r} (\mathcal{H}'_0 J_n(\eta' r) + H'_0 N_n(\eta' r)) \right] \cdot \Phi,$$

$$H'_z = (\mathcal{H}'_0 J_n(\eta' r) + H'_0 N_n(\eta' r)) \cdot \Phi.$$

Вне плазмы, где $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 \rho_0}{m^2}$, $\eta^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2} - k^2$, $\eta'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$, $J'_n(\xi) =$

$$= J'_n(\xi) = \frac{dJ_n(\xi)}{d\xi}, \quad N'_n(\xi) = \frac{dN_n(\xi)}{d\xi}, \quad \Phi = e^{i(\omega t + n\varphi - kz)}.$$

Граничные условия и дисперсионное уравнение

Пусть $r=R$ есть равновесная поверхность плазменного шнура и $r=R_1$ есть радиус коаксиального с ним идеально проводящего кожуха.

На свободной границе плазмы должна существовать определенная связь между смещением и радиальной составляющей скорости. В линейном приближении она выражается как

$$\frac{\partial \delta_r}{\partial t} = v_r \,|_{r=R}. \tag{5}$$

Здесь движение v_r связано с полем E_r согласно уравнению движения из системы (2). Следовательно, условие (5) равносильно соотношению

$$\frac{\partial^2 \delta r}{\partial t^2} - \frac{q_0^-}{\rho_0} E_r \,|_{r=R} = 0. \tag{6}$$

Оно может быть названо граничным условием для поля скорости электронной жидкости.

В связи с появлением слоя поверхностных зарядов, обусловленных деформацией границы электронной жидкости, появляются еще и поверхностные токи $j_z^{(s)} = q_0^- \delta r v_z$, $j_\varphi^{(s)} = q_0^- \delta r v_\varphi$, которые оказываются малыми величинами второго порядка. В нашей линейной теории они не будут участвовать. Поэтому с учетом (3) граничные условия для электромагнитных полей можно записать

$$(E_r' - E_r)\,|_{r=R} = -\frac{4\pi e \rho_0}{m}\, \delta r, \tag{7}$$

$$(E_\varphi' - E_\varphi)\,|_{r=R} = 0, \tag{8}$$

$$(E_z' - E_z)\,|_{r=R} = 0, \tag{9}$$

$$(H_r' - H_r)\,|_{r=R} = 0, \tag{10}$$

$$(H_\varphi' - H_\varphi)\,|_{r=R} = 0, \tag{11}$$

$$(H_z' - H_z)\,|_{r=R} = 0, \tag{12}$$

$$E_z' \,|_{r=R_1} = 0, \tag{13}$$

$$E_\varphi' \,|_{r=R_1} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, имеются 9 соотношений (6 — 14), которые должны выполнятся на границах $r = R$ и $r = R_1$. 7 из них являются независимыми, что как раз достаточно для определения 7 неизвестных величин: E_0, $\mathscr{E}_0'$, E_0', H_0, $\mathscr{H}_0'$, H_0' и r_0 амплитуды смещения δr.

Выбрав 7 независимых соотношений, например (6), (7), (9), (10), (12), (13) и (14), как условие их разрешимости получим дисперсионное уравнение

$$f_1 f_2 = \frac{n^2 k^2 \omega_0^4}{c^2 \eta^4 \eta'^4 R^2}, \tag{15}$$

где

$$f_1 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\eta} \frac{J_n'(\eta R)}{J_n(\eta R)} - \frac{\omega^2}{\eta'} \frac{J_n(\eta' R_1)\, N_n'(\eta' R) - N_n(\eta' R_1)\, J_n'(\eta' R)}{J_n(\eta' R_1)\, N_n(\eta' R) - N_n(\eta' R_1)\, J_n(\eta' R)},$$

$$f_2 = \frac{1}{\eta} \frac{J_n'(\eta R)}{J_n(\eta R)} - \frac{1}{\eta'} \frac{J_n'(\eta' R_1)\, N_n'(\eta' R) - N_n'(\eta' R_1)\, J_n'(\eta' R)}{J_n'(\eta' R_1)\, N_n(\eta' R) - N_n'(\eta' R_1)\, J_n(\eta' R)}.$$

Все величины, входящие в теорию, могут быть выражены через E_0:

$$r_0 = E_0 \frac{iek}{m\omega^2\eta}\left(\frac{n^2\omega_0^2}{c^2\eta^3\eta'^2 R^2}\frac{J_n(\eta R)}{f_2} - J_n'(\eta R)\right),$$

$$\mathscr{E}_0' = -E_0 \frac{N_n(\eta' R_1) J_n(\eta R)}{J_n(\eta' R_1) N_n(\eta' R) - N_n(\eta' R_1) J_n(\eta' R)},$$

$$E_0' = E_0 \frac{J_n(\eta' R_1) J_n(\eta R)}{J_n(\eta' R_1) N_n(\eta' R) - N_n(\eta' R_1) J_n(\eta' R)},$$

$$H_0 = E_0 \frac{ink\omega_0^2}{c\omega\eta^2\eta'^2 R}\frac{1}{f_2},$$

$$\mathscr{H}_0' = -E_0 \frac{ink\omega_0^2}{c\omega\eta^2\eta'^2 R}\frac{1}{f_2}\frac{N_n'(\eta' R_1) J_n(\eta R)}{J_n'(\eta' R_1) N_n(\eta' R) - N_n'(\eta' R_1) J_n(\eta' R)},$$

$$H_0' = E_0 \frac{ink\omega_0^2}{c\omega\eta^2\eta'^2 R}\frac{1}{f_2}\frac{J_n'(\eta' R_1) J_n(\eta R)}{J_n'(\eta' R_1) N_n(\eta' R) - N_n'(\eta' R_1) J_n(\eta' R)}. \tag{16}$$

Необходимо еще отметить, что при $r_0=0$ граничное условие (7) в силу (6) распадается на два условия

$$E_r|_{r=R} = 0 \text{ и } E_r'|_{r=R} = 0.$$

Тогда число независимых соотношений больше, чем число неизвестных величин, и система становится неразрешимой. Итак, наличие волн поверхностных зарядов с характерной амплитудой r_0 является необходимым условием разрешимости граничной задачи для плазмы со свободной границей.

Величина зазора

Отмеченное выше противоречие в теории Рамо наводит на мысль, что не является ли наличие зазора между поверхностями плазмы и волновода необходимым условием для процесса распространения электромагнитных волн через плазменный волновод? Чтобы выяснить это, проследим поведение волн поверхностных зарядов с характерной амплитудой r_0 при $\Delta r = (R_1 - R) \to 0$. Анализ дисперсионного уравнения (15) показывает, что при $\Delta r \to 0$ для E — волны имеет место $J_n(\eta R)|_{R\to R_1} \to 0$. Поэтому разложим правую часть (16) по Δr в окрестности точки $\nu_n^{(i)} R_1$, где $\nu_n^{(i)} R_1$ есть i-тый корень функции Бесселя $J_n(\eta R_1)$. В результате получим

$$r_0|_{R\to R_1} \approx E_0 \frac{iek}{m\omega^2\eta}\left(-J_n'(\nu_n^{(i)} R_1) + J_n''(\nu_n^{(i)} R_1)\,\nu_n^{(i)}\Delta r\right).$$

Отсюда амплитуда волн поверхностных зарядов при $\Delta r \to 0$ остается конечной величиной. Для плазмы с электронной концентрацией

$$N_0^- \sim 10^{10}\ \text{см}^{-3} \text{ при } k = 0{,}1\ \text{см}^{-1},\quad R_1 = 10\ \text{см},\ E_0 = 100\ \frac{\text{в}}{\text{см}}$$

имеем

$$r_0|_{R\to R_1} \sim 10^{-4}\ \text{см}.$$

Так как величина зазора не может быть меньше амплитуды волн поверхностных зарядов, при заполнении волновода плазмой всегда должно быть $\Delta r \geqslant r_0$.

Введение зазора приводит к естественному условию:

$$v_r|_{r=R} = \frac{\partial \delta r}{\partial t} \neq 0.$$

Подобное условие при полном заполнении приводит к вышеупомянутой трудности. Важно, что это условие в случае зазора не приводит к конфликту с граничными условиями для электромагнитных полей и, наоборот, составляет с ними единую систему граничных условий, однозначно определяющих решение задачи.

Выражаю глубокую благодарность проф. А. А. Власову за предложенную тему и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hahn W. C. Gen. Elec. Rev., **42**, 258, 1939.
2. Ramo S. Phys. Rev., **56**, 276, 1939.
3. Trivelpiece A. W., Gould R. W. J. Appl. Phys., **30**, 1784, 1959.
4. Власов А. А. Теория многих частиц. М., ГИТТЛ, 1950.
5. Голант В. Е., Шилинский А. П. ЖТФ, **30**, 15, 1960.
6. Де-Бройль Луи. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. М., ИЛ, 1948.

Поступила в редакцию
20.12 1967 г.

Кафедра
теоретической физики