Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1968

УДК 621.384.61

А. А. КОЛОМЕНСКИЙ, А. Т. ПОЛУХИН

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В УСКОРИТЕЛЯХ

Получены формулы, определяющие поведение амплитуд бетатронных колебаний в области параметрического резонанса при наличии пространственного заряда. Результаты найдены из рассмотрения самосогласованной задачи.

С появлением сильноточных ускорителей и накопителей особый интерес приобрел учет влияния пространственного заряда на устойчивость движения частиц. Определенный интерес представляет также оценка действия кулоновских сил и в установках с умеренной интенсивностью. Одним из важных аспектов этой общей задачи является исследование влияния пространственного заряда на поведение частиц в окрестности опасных резонансов, вызываемых возмущениями магнитного поля. При этом в качестве предельно допустимого заряда (количества частиц) принимается обычно такое значение, которое соответствует сдвигу бетатронных частот до целого или полуцелого резонансов. Следует подчеркнуть, однако, что такой вывод справедлив лишь при постоянной плотности, что, очевидно, не выполняется в области резонанса. Фактически дело обстоит гораздо сложнее, и задача требует учета самосогласованного механизма между изменением плотности заряда, с одной стороны, и изменением сдвига рабочей точки с другой[1]. В настоящей работе этот механизм рассматривается для окрестности параметрического (полуцелого) резонанса. Показано, что влияние пространственного заряда на резонанс дает в одних случаях уменьшение амплитуд колебаний, а в других вызывает более сильный их рост. Получены наглядные критерии, позволяющие определить, какой из указанных двух случаев имеет место для конкретных параметров ускорителя.

Основные уравнения

Рассмотрим уравнение одномерных бетатронных колебаний в циклическом ускорителе:

$$\ddot{z} + \varkappa(\tau) z + F(z, \tau) = G(z, \tau), \tag{1}$$

[1] Аналогичные вопросы обсуждаются в работе [1].

$\varkappa(\tau)z$ — магнитная фокусировка, $F(z, \tau)$ — силы, обязанные возмущениям поля, $G(z, \tau)$ — возмущающая сила, действующая со стороны пространственного заряда. Точками обозначены производные по $\tau=\omega t$, где ω — частота обращения, t — время. Сначала нужно определить явный вид величины G, удовлетворяющей условию самосогласованности. Будем искать решение (1) в виде

$$\begin{aligned} z &= A|\sigma|\cos(\nu\tau+\eta+\beta), \\ \dot{z} &= -A\nu|\sigma|\sin(\nu\tau+\eta+\beta), \end{aligned} \tag{2}$$

где ν — частота бетатронных колебаний в нулевом приближении [2], A и β — постоянные, $|\sigma|$ и η — искомые функции, зависящие от A, β и τ. Величины, A и β имеют смысл начальных значений амплитуд и фаз колебаний, если $|\sigma|=1$, $\eta=0$ при $\tau=0$. Величина G выражается через функцию распределения $\varphi(\dot{z}, z, \tau)$ частиц в фазовом пространстве для симметричных относительно $z=0$ пучка и сил таким образом

$$G = [4\pi e^2/m_0\gamma^3\omega^2]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{z}\varphi d\dot{z}dz, \tag{3а}$$

где γ — релятивистский фактор. Воспользуемся сохранением фазового объема и перейдем в (3а) от $\dot{z}$, z к A и β. Предположим равномерное распределение частиц по начальным фазам колебаний и пока произвольное их распределение по начальным амплитудам $\Phi(A)$. В результате интегрирования по β с точностью до величин второго порядка малости имеем

$$G = \operatorname{sign} z\frac{4\pi e^2}{m_0\gamma^3\omega^2}\left\{\int\limits_{A_z}^{A_{\max}}\Phi\arcsin\frac{|z|}{A|\sigma|_z}dA+\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{A_z}\Phi\, dA\right\}, \tag{3б}$$

где $A_{\max}$ — максимальная начальная амплитуда, $|\sigma_z|$ — значение функции $|\sigma|$, соответствующей частицам с начальной амплитудой A, находящимися в точке z. Величина A_z такова, что $A|\sigma|_z=|z|$ при $A=A_z$. Возьмем два характерных распределения $\Phi(A)$.

1. Все частицы в начальный момент имеют одну и ту же амплитуду A_0:

$$\Phi = N\pi^{-1}\delta(A-A_0), \tag{4}$$

где N — полное число частиц в поперечном сечении пучка. В этом случае из (3б) для G из (1) находим

$$G = q_1A_0\arcsin\frac{z}{A_0|\sigma|}, \quad q_1 = 4e^2N/m_0\gamma^3\omega^2A_0. \tag{5}$$

Если учесть, что на отрезке $(-1, 1)$ арксинус является функцией, близкой к линейной, то с достаточной точностью его можно аппроксимировать аргументом и положить

$$G = q_1z/|\sigma|. \tag{6}$$

2. Плотность пучка по поперечному сечению однородна, функция G линейна по z. К этому в предположении о линейности сил F из (1) приводит распределение

$$\Phi = N(\pi A_{\max})^{-1}A(A^2_{\max}-A^2)^{-1/2}. \tag{7}$$

Решение задачи для этого случая рассматривается ниже.

Влияние пространственного заряда на параметрический резонанс

Рассматривая движение вблизи параметрического резонанса, т. е. записывая F в виде $p(\tau)z$, и беря для G в случае распределения (4) выражение (6), получаем из (1) уравнение движения, учитывающее влияние пространственного заряда

$$\ddot{z} + \{\varkappa(\tau) + p(\tau)\} z = q_1 z/|\sigma|. \tag{8}$$

При заданных функциях $\varkappa(\tau)$ и $p(\tau)$ функция $|\sigma|$ определяется из уравнений

$$\dot{\sigma} = (2i\nu)^{-1} \exp(-i\nu\tau - i\beta) \{[q_1/|\sigma| + \nu^2 - \varkappa(\tau) - p(\tau)] \times \times \sigma \exp(i\nu\tau + i\beta) + \text{к. с.}\}. \tag{9}$$

Для решения (9) применим метод усреднения [2], который справедлив, когда длина волны бетатронных колебаний велика по сравнению с периодом магнитной системы, что обычно хорошо выполняется, и когда действие пространственного заряда и параметрического возмущения мало по сравнению с основной фокусировкой. Усредняя (9) по периоду бетатронных колебаний вблизи параметрического резонанса $\nu = k/2 + \delta$, $\delta \ll 1$, k — целое, получаем так называемые укороченные уравнения

$$\dot{\sigma} = P\sigma^* \exp(-2i\,\delta\tau - 2i\beta) - iQ_1 \sigma/|\sigma|, \tag{10}$$

где

$$P = -(2i\nu)^{-1} \langle p(\tau) \exp(ik\tau)\rangle = |P| \exp(i \arg P),$$

постоянная $Q_1 = q_1/2\nu$ равна кулоновскому сдвигу рабочей точки в начальный момент. Звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Получим соответствующие укороченные уравнения для распределения (7). Для этого достаточно найти усредненную величину силы пространственного заряда G. При подстановке (7) в формулу (3б) и ее усреднении по периоду бетатронных колебаний с точностью до малых величин порядка $|P|/\nu$, q_2/ν^2 получаем

$$G = q_2 z/|\tilde{\sigma}|, \quad q_2 = \frac{2\pi e^2 N}{m_0 \gamma^3 \omega^2 A_{\max}}, \quad |\tilde{\sigma}|^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\beta}{|\sigma(\tau, \beta)|}. \tag{11}$$

Такой функции G соответствуют усредненные величины плотности $\rho = N/2A_{\max} |\tilde{\sigma}|$ и размеров пучка $Z = A_{\max} |\tilde{\sigma}|$, а укороченные уравнения имеют вид

$$\dot{\sigma} = P\sigma^* \exp(-2i\,\delta\tau - 2i\beta) - iQ_2 \sigma/|\tilde{\sigma}|, \tag{12}$$

где $Q_2 = q_2/2\nu$. Уравнения (12) совместно с (11) определяют функцию $|\tilde{\sigma}|$, которая является коэффициентом изменения плотности и размеров пучка.

С точки зрения практики наиболее важно найти максимальное значение коэффициента $|\sigma_{\max}|$ и промежуток времени T, за который оно достигается.

Для оценки величин $|\tilde{\sigma}|_{\max}$ и T системы (11) и (12) приближенно заменим на более простое уравнение (10). Для этого согласно теореме о среднем, представим $|\tilde{\sigma}| = |\sigma(r, \xi)|$, $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$ (где ξ — адиабатическая величина) и произвольную величину β в (12) приравняем ξ.

Выделим в (10) мнимую и вещественную части и перейдем к каноническим переменным

$$I = |\sigma|^2/2, \quad w = \eta + \delta\tau + \beta - \frac{1}{2} \arg P,$$

для которых получаем систему

$$\dot{I} = 2|P| \cos 2w, \quad \dot{w} = \delta - |P| \sin 2w - Q/\sqrt{2I}, \tag{13}$$

где параметр Q в зависимости от типа распределения равен либо Q_1, либо Q_2. Система (13) имеет кононическую форму

$$\dot{I} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w}, \quad \dot{w} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I}, \quad \mathcal{H} = I(\delta - |P| \sin 2w) - \sqrt{2I}\, Q. \tag{14}$$

Поскольку $\mathcal{H}$ является интегралом движения, можно получить фазовые траектории, определяемые линиями

$$\mathcal{H}(I, \omega) = E = \text{const}. \tag{15}$$

В области $\delta^2 > |P|^2$, в которой обычно работают ускорители, согласно (13), (15) находим

$$\int\limits_1^{|\sigma|} x \prod_{n=1}^{4} (x - x_n)^{-1/2} dx = \pm \sqrt{|P|^2 - \delta^2}\, \tau, \; x_n = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + 2E(\delta \pm |P|)}}{\delta \pm |P|}. \tag{16а}$$

Отсюда видно, что $|\sigma|$ медленно изменяется во времени между двумя значениями x_n, ближайшими сверху и снизу к единице. Период биений T определяется непосредственно из уравнений фазовых траекторий [3]. При использовании (15) получаем

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\delta^2 - |P|^2}} \pm \frac{Q}{\sqrt{2}\,\delta} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{\left(1 - \frac{|P|}{\delta} \sin\alpha\right) \sqrt{\lambda - \mu \sin\alpha)}},$$

$$\lambda = 2Q^2 + 4E\delta, \quad \mu = 4E|P|. \tag{16б}$$

Здесь при $\delta > 0$ знак плюс соответствует области значений $Q \leqslant \delta + |P| - \{(\delta + |P|)^2 - \delta^2 + |P|^2\}^{1/2}$, минус $Q \geqslant Q_0 = \delta + |P| + \{(\delta + |P|)^2 - \delta^2 + |P|^2\}^{1/2}$. При $\delta < 0$ стоит минус. В зависимости от знака μ интеграл в (16б) сводится к двум различным эллиптическим интегралам третьего рода. Период T обычно равен нескольким десяткам оборотов частиц в камере. Отсюда следует, что проявление ограничивающего действия пространственного заряда следует ожидать непосредственно после инжекции.

Величину $|\sigma|_{\max}$ при различных соотношениях параметров можно определить из анализа фазовых траекторий. Для случая, когда рабочая точка при нулевом токе находится вне резонансной области, т. е. при $\delta^2 < |P|^2$, значения $|\sigma|_{\max}$ в зависимости от величины кулоновского параметра Q даются формулами

$$\delta < 0, \; \varepsilon|\sigma|_{\max} = -S + \sqrt{S^2 + 2\varepsilon S + \varepsilon}, \tag{17а}$$

$$\delta > 0, \quad 0 \leqslant S \leqslant 1, \; \varepsilon|\sigma|_{\max} = S + \sqrt{S^2 - 2\varepsilon S + \varepsilon}, \tag{17б}$$

$$1 \leqslant S \leqslant S_0, \; \varepsilon|\sigma|_{\max} = kS + \sqrt{k^2 S^2 - 2\varepsilon k S + \varepsilon k}, \tag{17в}$$

$$S > S_0, \; |\sigma|_{\max} = S - \sqrt{S^2 - 2S + \varepsilon}, \tag{17г}$$

где

$$S=Q\,(|\delta|+|P|)^{-1}, \quad S_0=Q_0\,(|\delta|+|P|)^{-1}, \quad k^{-1}=S\,(2-S),$$

$$\varepsilon=(|\delta|-|P|)\,(|\delta|+|P|)^{-1}.$$

При $\delta^2<|P|^2$, т. е. когда рабочая точка при нулевом токе находится в области резонанса, для $Q\leqslant Q_0$ величина $|\sigma|_{\max}$ неограничена, а для $Q>>Q_0$ значения $|\sigma|_{\max}$ даются формулами (17а), (17г). Графики формул (17) представлены на рисунках 1, 2, где совмещены области $\delta<0$, $\delta>0$. При $Q=0$ полученные формулы совпадают с известными [2]. Считая для оценки $\delta=5|P|$, получаем при $Q=Q_0=1{,}9\,\delta$ величину $|\sigma|_{\max}$ равной 3,8, в то время как при $Q=0$, $|\sigma|_{\max}=1{,}2$.

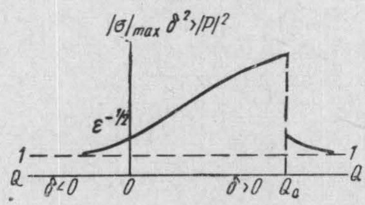

Рис. 1

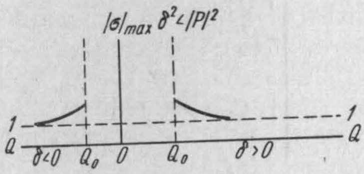

Рис. 2

Обсуждение результатов

Смысл полученных результатов можно качественно пояснить следующим образом. Если пространственный заряд мал, то его непосредственным дефокусирующим действием можно пренебречь. Но при этом, как показано в (8), уменьшается эффективное значение частоты. Так как параметрический резонанс критичен к этой величине, то даже небольшой кулоновский сдвиг оказывает значительное действие. В свою очередь параметрический резонанс увеличивает размеры пучка и уменьшает его плотность. Величина кулоновского сдвига пропорциональна плотности и будет при этом изменяться.

В зависимости от того, куда двигается рабочая точка относительно резонансной области, действие параметрического возмущения либо усиливается, либо ослабевает. Из рис. 1, 2 видно, что влияние пространственного заряда на величину амплитуд колебаний несимметрично относительно взаимного расположения частоты ν и ее полуцелого резонансного значения. При $\delta>0$ рост интенсивности от нуля сначала усиливает действие резонанса, что можно объяснить приближением рабочей точки за счет кулоновского сдвига к области резонанса. Затем, при $Q>Q_0$ наблюдается уменьшение амплитуд. Это вызвано тем, что рабочая точка смещается за область резонанса и при дальнейшем росте интенсивности уходит от нее. При $\delta^2<|P|^2$ и $Q>Q_0$ амплитуды конечны и уменьшаются с ростом интенсивности. Однако при $Q<Q_0$ здесь по-прежнему выполняются резонансные условия, поскольку рабочая точка еще находится в области резонанса.

В рабочей области $\delta^2>|P|^2$ амплитуды достигают максимальной величины при $Q=Q_0$. Можно принять, что опасное влияние пространственного заряда начинается при увеличении амплитуд в три раза, т. е. при $|\sigma|_{\max}=3$. Для реальных значений параметров, лежащих обычно в области $|\delta|=(3–7)\,|P|$, имеем $Q_0=(1{,}7–2{,}3)\,|\delta|$, а значения $|\sigma|_{\max}$ при $Q=Q_0$ равны (3—6). Отсюда можно заключить, что опасная ситуация возникает при величине Q, равной примерно удвоенному расстоянию частоты ν в нулевом приближении до области резонанса. Напомним, что параметр Q равен начальному кулоновскому сдвигу рабочей точки.

Если считать размеры пучка равными в начальный момент трети размеров камеры, $\delta = (3-7)\,|P|$, то для синхротрона ФИАН на 680 *Мэв* с параметрами $\gamma = 2{,}6$; $\nu \simeq 1$, $\delta = 0{,}25$ согласно формуле (5) получаем для двух значений тока электронов 0,1 *а* и 2,5 *а* соответственно $|\sigma|_{\max} = (1{,}1-1{,}5)$ и $|\sigma|_{\max} = (3-4)$. Фактически в данном синхротроне достигнут ток 0,1 *а*. Такие же значения $|\sigma|_{\max}$ оказываются в синхротроне на 1,1 *Гэв* во Фраскати (Италия), имеющего параметры $\gamma = 6$, $\nu \cong 1$, $\delta = 0{,}2$, при токах 0,2 *а* и 4 *а*.

Отметим, что в данной работе не учитывались изменения величины расстройки δ и кулоновского параметра Q, возникающие в процессе синхротронных колебаний, а также изменение энергии частиц. Однако если учесть, что основное ограничивающее действие пространственного заряда согласно (16б) должно проявляться на начальной стадии ускорения в течение достаточно малого промежутка времени, то можно считать, что учет медленных изменений δ, Q в этой наиболее опасной области не окажется существенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith L. Труды международной конференции по ускорителям. Дубна, 1963 г. М., Атомиздат, 1964, стр. 847.
2. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
28.12 1967 г.

НИИЯФ