Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1968

УДК 53 : 519,25; 530.145

В. Д. ОЗРИН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВУХВРЕМЕННОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ФОРМАЛИЗМА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАЗИЧАСТИЧНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ФЕРМИ-СИСТЕМЕ С КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Метод двухвременных температурных функций Грина используется для исследования системы с кулоновским взаимодействием. Предложенная процедура расцепления приводит к выражению для массового оператора и одночастичной функции Грина. С помощью функции Грина получен спектр одночастичных возбуждений системы и термодинамический потенциал в случае высоких и низких температур.

§ 1. В данной работе вычисляются одночастичные функции Грина для электронного газа высокой плотности и исследуются спектры энергий элементарных возбуждений системы. В качестве математического аппарата выбран метод опережающих и запаздывающих функций, удовлетворяющих бесконечной системе зацепляющихся уравнений. В работе сделана попытка найти аппроксимацию для функций Грина второго и более высоких порядков, в результате которой цепочка обрывалась бы на втором уравнении. Решение полученной замкнутой системы уравнений в приближении высокой плотности позволило определить массовый оператор и одночастичную функцию Грина рассматриваемой системы. С помощью функции Грина вычислен спектр энергий возбуждений для случаев вырожденного и невырожденного газа, который при температуре $\theta=0$ ($\vartheta=kT$) совпадает с известным в литературе [1].

Для случая невырожденного газа аналогичные результаты были получены в работах [2], однако в нашем рассмотрении большее внимание было уделено вкладам в затухание квазичастицы непосредственно от парного взаимодействия, нежели от коллективных эффектов. С помощью одночастичной функции вычислены также термодинамический потенциал системы, химический потенциал при низких и высоких температурах.

§ 2. Рассмотрим систему, состоящую из N электронов в объеме V, заполненном равномерно распределенным положительным зарядом такой же величины, что и суммарный заряд электронов. Присутствие компенсирующего заряда, имитирующего фон положительных ионов решетки, необходимо для обеспечения устойчивости системы. Гамильтониан системы записывается в виде [3]

$$H=\sum_{p}\frac{p^2}{2m}a_p^+a_p+\sum_{q\neq 0}\frac{\nu(q)}{2V}\sum_{p,k}a_p^+a_{k+q}^+a_ka_{p+q}, \tag{1}$$

где a_p^+, a_p — операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие фермиевским перестановочным соотношениям

$$[a_p a_{p_1}^+]_+ = \delta_{pp_1}, \quad [a_p a_{p_1}]_+ = 0, \quad [a_p^+ a_{p_1}^+]_+ = 0,$$

индексы p, k — определяют импульс и спин $p = (\vec{p}, s)$, а индекс q—только импульс; $\nu(q)$ — фурье-образ потенциала взаимодействия

$$\nu(q) = \int d\vec{r}\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}}\, \Phi(r) = \frac{4\pi e^2 \hbar^2}{q^2}$$

(условие $q \neq 0$ в выражении (1) является следствием учета взаимодействия электронов с фоном и фона самого с собой).

Для нахождения функций Грина воспользуемся уравнением движения, фурье-образ которого по времени записывается следующим образом [2]:

$$EG(A, B; E) = \langle AB - \eta BA \rangle + G([A\mathcal{H}]_-, B; E), \tag{2}$$

где $\mathcal{H} = H - \mu N$.

Полагая в этом уравнении $A = a_p$, $B = a_p^+$, $\eta = -1$ и вычисляя коммутатор $[a_p \mathcal{H}]_-$, получим уравнение для одночастичной функции $G(a_p, a_p^+; E) = G_p(E)$, которое можно представить в виде

$$\left(E - \varepsilon_p + \sum_q \frac{\nu(q)}{V} n_{p+q}\right) G_p(E) =$$

$$= 1 + \sum_{q, k \neq p} \frac{\nu(q)}{V} G(a_{k+q}^+ a_k a_{p+q}, a_p^+; E) + \sum_q \frac{\nu(q)}{V} G((n_{p+q} - a_{p+q}^+ a_{p+q}) a_p, a_p^+; E), \tag{3}$$

где $\varepsilon_p = \dfrac{p^2}{2m} - \mu$, $n_p = \langle a_p^+ a_p \rangle$.

Как показали Зул и Вертхеймер [4], поправки, возникающие в результате учета второй суммы в правой части (3), имеют пренебрежимо малый порядок, поэтому для системы с большим числом частиц их можно не принимать во внимание. Если в правой части пренебречь, кроме того, и первой суммой, то мы получим

$$\left(E - \varepsilon_p + \sum_q \frac{\nu(q)}{V} n_{p+q}\right) G_p(E) = 1.$$

В этом приближении функция Грина имеет полюс на действительной оси в точке $E(p) = \varepsilon_p - \sum \dfrac{\nu(q)}{V} n_{p+q}$, который соответствует незатухающему одночастичному возбуждению. Полученное уравнение представляет собой уравнение первого приближения по энергии взаимодействия и соответствует приближению Хартри—Фока, учитывающему только обменное взаимодействие пары частиц и не принимающему во внимание корреляцию их движения, связанную с прямым взаимодействием ν. При $\theta = 0$ это приводит к равной нулю плотности состояний около поверхности Ферми и к противоречащему экспериментам поведению электронной теплоемкости при низких температурах [5]. Для того чтобы выйти за рамки первого приближения, сохраним в уравнении (3) отброшенную

ранее сумму и составим уравнение для входящей в нее функции Грина. Полагая в уравнении (2) $A = a^+_{k+q} a_k a_{p+q}$, $B = a^+_p$, $\eta = -1$ и вычисляя соответствующие коммутаторы (при условии $k \neq p$), получим

$$(E - \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_k + \varepsilon_{k+q}) G(a^+_{k+q} a_k a_{p+q}, a^+_p; E) =$$

$$= \sum_{q_1} \frac{\nu(q_\perp)}{V} G(a^+_{k+q} a_{k+q_1} a_{p+q-q_1}, a^+_p; E) +$$

$$+ \sum_{p_1 q_1} \frac{\nu(q_1)}{V} [G(a^+_{k+q} a^+_{p_1+q_1} a_{p+q+q_1} a_{p_1} a_k, a^+_p; E) +$$

$$+ G(a^+_{k+q} a^+_{p_1-q_1} a_{p_1} a_{k-q_1} a_{p+q}, a^+_p; E) - G(a^+_{k+q+q_1} a^+_{p_1-q_1} a_{p_1} a_k a_{p+q}, a^+_p; E)].$$

Выделим из сумм, входящих в правую часть этого уравнения, слагаемые с совпадающими и несовпадающими импульсами. Речь идет о совпадении или несовпадении импульсов, определяющих один из операторов рождения и один из операторов уничтожения, относящихся к одному и тому же времени. При этом могут встретиться три вида слагаемых.

1. Члены с двумя парами совпадающих импульсов, например

$$G(a^+_{p_1} a^+_k a_k a_{p_1} a_p, a^+_p; E), \quad k \neq p_1.$$

2. Члены, в которых совпадает только одна пара импульсов, например

$$G(a^+_{p_1} a^+_k a_k a_{p_2} a_{p_3}, a^+_p; E), \quad p_1 \neq p_2, \; p_1 \neq p_3.$$

3. Полностью «недиагональные» члены, т. е. слагаемые, в которых нет совпадающих пар импульсов.

Заменяя в членах типа 1 и 2 операторы $a^+_k a_k$ на средние числа заполнения n_k и пренебрегая полностью «недиагональными» членами, получим уравнение

$$(E - \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_k + \varepsilon_{k+q}) G_{k+q;k,p+q}(E) = \frac{\nu(q)}{V} [(1 - n_{p+q})(1 - n_k) n_{k+q} +$$

$$+ n_{p+q} n_k (1 - n_{k+q})] G_p(E) - \delta_{ss_1} \frac{\nu(p-k)}{V} [(1 - n_{p+q})(1 - n_k) n_{k+q} +$$

$$+ n_{p+q} n_k (1 - n_{k+q})] G_p(E) + \frac{\nu(q)}{V} (n_{k+q} - n_k) \sum_{k_1 \neq p} G_{k_1+q;k_1,p+q}(E) -$$

$$- \delta_{ss_1} \frac{\nu(p-k)}{V} \sum_{k_1 \neq p} G_{k_1-p+k;k_1,k}(E)(n_{k+q} - n_{p+q}) +$$

$$+ \sum_{q_1} (n_{k+q+q_1} - n_{p+q+q_1} - n_{k+q_1}) \frac{\nu(q_1)}{V} G_{k+q;k,p+q}(E) +$$

$$+ \sum_{q_1 \neq q} \frac{\nu(q_1)}{V} (n_{p+q} - n_{k+q}) G_{k+q-q_1;k,p+q-q_1}(E) +$$

$$+ \sum_{q_1 \neq k-p} \frac{\nu(q_1)}{V} (n_k - n_{k+q}) G_{k+q-q_1;\, k-q_1,\, p+q}(E) +$$

$$+ \sum_{q_1 \neq q;\, k-p} \frac{\nu(q_1)}{V} (1 - n_k - n_{p+q}) G_{k+q;\, k+q_1,\, p+q-q_1}(E), \tag{4}$$

где

$$G_{k+q;k,p+q}(E) = G(a^+_{k+q}a_k a_{p+q}, a^+_p; E),\ k = (\vec{k}, s_1),\ p = (\vec{p}, s),$$

которое вместе с уравнением (3) входит в замкнутую систему уравнений для функций Грина первого и второго порядка. Таким образом аппроксимация, в результате которой получена система (3)—(4), состоит в пренебрежении величинами типа

$$G((a^+_k a_k - n_k)\, a^+_{p_1} a_{p_2} a_{p_3}, a^+_p; E),$$

$$G((a^+_k a_k a^+_{p_1} a_{p_1} - n_k n_{p_1})\, a_p, a^+_p; E).$$

Естественно, что для оценки этих величин мы должны были бы рассмотреть корреляционные средние более высокого порядка, чем сохраненные и вошедшие в функцию $G_{k+q;\,k,\,p+q}(E)$. Это вызвало бы необходимость общего повышения точности рассмотрения и сохранения в уравнении (4) также и членов вида 3. Однако, как показано в [6], уравнение, подобное уравнению (4) в пределе высокой плотности, описывает основные характерные для системы с кулоновским взаимодействием коллективные эффекты (в широком диапазоне температур), такие, как экранировка, плазменные колебания и т. д. В связи с этим мы можем рассчитывать, что составленная нами система уравнений достаточна для учета вкладов, обусловленных корреляционными эффектами, в энергию одночастичных возбуждений.

Мы ограничимся отысканием асимптотики решения уравнения (4) при $q \to 0$, для чего в правой части уравнения сохраним только два члена, а именно

$$(E - \varepsilon_{p+q} - \varepsilon_k + \varepsilon_{k+q})\, G_{k+q;k,p+q} E = \frac{\nu(q)}{V}(n_{k+q} - n_k) \sum_{k_1 \neq p} G_{k_1+q;k_1,p+q}(E) +$$

$$+ \frac{\nu(q)}{V}[(1 - n_{p+q})(1 - n_k)\, n_{k+q} + n_{p+q} n_k (1 - n_{k+q})]\, G_p(E). \qquad (5)$$

Остальные члены в правой части ограничены при $q \to 0$. Каждое слагаемое в правой части (4) пропорционально параметру $\alpha \sim \frac{n^{1/3} e^2}{\bar{\varepsilon}}$, который в частных случаях вырожденного и невырожденного газа принимает значения

$$\alpha_1 = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} \frac{n^{1/3} e^2}{\varepsilon_F} = \left(\frac{k_{T.\,F}}{2k_F}\right)^2; \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{9\pi}\right)^{1/3} \frac{n^{1/3} e^2}{\theta} = \left(\frac{k_D}{2k_F}\right)^2.$$

Отсюда ясно, что приближение, связанное с решением уравнения (4) в пределе $q \to 0$, позволяет определить только главные асимптотические члены разложения массового оператора по $\alpha \ll 1$ и, таким образом, описывает рассматриваемую систему в пределе высокой плотности. Отброшенные же в уравнении (4) члены дают вклад порядка α^2 в массовый оператор [1].

Из уравнения (5) находим функцию $G_{k+q;k,p+q}(E)$ и, подставляя ее в уравнение (3), получаем одночастичную функцию $G_p(E)$ в следующем виде: $G_p(E) = \{E - \varepsilon_p - \mathfrak{M}_p(E)\}^{-1}$, где введен массовый оператор

---

[1] Составляя уравнения для функций Грина, которыми мы пренебрегли при выводе (4), можно показать, что эти члены дают поправку к массовому оператору порядка α^3.

$$\mathfrak{M}_p(E) = \sum_q \frac{\nu(q)}{V}\left[-n_{p+q} + \frac{(1-n_{p+q})I_1(q, E-\varepsilon_{p+q}) + n_{p+q}I_2(q, E-\varepsilon_{p+q})}{1-I(q, E-\varepsilon_{p+q})}\right], \tag{6}$$

а величины I_1, I_2 определяются формулами

$$I_1(q, E) = \frac{\nu(q)}{V}\sum_k \frac{n_{k+q}(1-n_k)}{E-\varepsilon_k+\varepsilon_{k+q}}; \quad I_2(q, E) =$$

$$= \frac{\nu(q)}{V}\sum_k \frac{n_k(1-n_{k+q})}{E-\varepsilon_k+\varepsilon_{k+q}}; \quad I = I_1 - I_2. \tag{7}$$

Входящую в выражения (6) и (7) величину n_p следовало бы находить в соответствии с общим правилом [2]:

$$n_p = \langle a_p^+ a_p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi i}\,\frac{G_p(E-i0) - G_p(E+i0)}{e^{E/\theta}+1}.$$

Как показано в работах [7] и [2], распределение n_p для рассматриваемой нормальной ферми-системы не существенно отличается от

$$n_p^0 = (e^{\varepsilon_p/\theta}+1)^{-1}.$$

(Например, при $\vartheta=0$ сохраняется скачок при $p=p_F$ [7].) Исправленное выражение для n_p дает поправку к поляризационному оператору I порядка α^2. Ограничиваясь, однако, только главной асимптотикой массового оператора по $\alpha\to 0$, будем полагать при вычислении (6) и (7) $n_p = \overset{0}{n}_p$.

§ 3. Приступим к вычислению поляризационного оператора I и для этого, переходя в выражениях (7) от суммирования к интегрированию, запишем величины I_1, I_2 в следующем виде:

$$I_1 = \frac{2me^2}{\hbar p_0 \xi^3}\int_0^\infty \chi^2\,d\chi \int_{-1}^{1} dx\,\frac{n_k(1-n_{k+q})}{\omega - \frac{\xi}{2} - \chi x};$$

$$I_2 = \frac{2me^2}{\hbar p_0 \xi^3}\int_0^\infty \chi^2\,d\chi \int_{-1}^{1} dx\,\frac{n_k(1-n_{k+q})}{\omega + \frac{\xi}{2} + \chi x},$$

где введены обозначения $\chi = \frac{k}{p_0}$, $\xi = \frac{q}{p_0}$, $\omega = \frac{mE}{p_0 q}$, $x = \cos(\vec{k}\vec{q})$, а импульс $p_0 = p_F$ для случая вырожденного и $p_0 = \sqrt{2m\theta}$ для невырожденного газа.

В случае вырожденного газа, т. е. при $\vartheta \ll \varepsilon_F$, для вычисления интегралов, содержащих величины n_k, воспользуемся известным приближенным соотношением

$$\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\exp\frac{\varepsilon-\mu}{\theta}+1} \approx \int_0^{\varepsilon_F} f(\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{\pi^2\theta^2}{12\varepsilon_F} f(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2\theta^2}{6} f'(\varepsilon_F) \tag{8}$$

и получим

$$I_1(q, E) = \frac{2\alpha_1}{\xi^2}\left[\frac{1-\left(\omega+\frac{\xi}{2}\right)^2}{2\xi}\ln\left(\omega+\frac{\xi}{2}-1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1-\left(\omega-\frac{\xi}{2}\right)^2}{2\xi}\ln\left(\omega-\frac{\xi}{2}-1\right)+\omega\ln\omega+\frac{\omega-1}{2}\right]+$$

$$+\frac{\pi^2\alpha_1}{12\xi^3}\left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^2\left[\ln\left(\frac{\omega-\frac{\xi}{2}-1}{\omega+\frac{\xi}{2}-1}\right)+\left(\omega-\frac{\xi}{2}-1\right)^{-1}-\right.$$

$$\left.-\left(\omega+\frac{\xi}{2}-1\right)^{-1}+2(\xi\omega)^{-1}\right],$$

$$I_2(q, E) = \frac{2\alpha_1}{\xi^2}\left[\frac{1-\left(\omega+\frac{\xi}{2}\right)^2}{2\xi}\ln\left(\omega+\frac{\xi}{2}+1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1-\left(\omega-\frac{\xi}{2}\right)^2}{2\xi}\ln\left(\omega-\frac{\xi}{2}+1\right)+\omega\ln\omega+\frac{\omega+1}{2}\right]+$$

$$+\frac{\pi^2\alpha_1}{12\xi^3}\left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^2\left[\ln\left(\frac{\omega-\frac{\xi}{2}+1}{\omega+\frac{\xi}{2}+1}\right)+\left(\omega+\frac{\xi}{2}+1\right)^{-1}-\right.$$

$$\left.-\left(\omega-\frac{\xi}{2}+1\right)^{-1}+2(\xi\omega)^{-1}\right], \qquad (9)$$

где $\xi \leqslant 2$ $(q \leqslant 2p_F)$.

Мнимые и действительные части величин I_1, I_2 на действительной оси E можно разделить с помощью функциональных равенств

$$\frac{1}{x \pm i0} = \frac{P}{x} \mp i\pi\delta(x); \quad \ln(x \pm i0) = \ln|x| + i\pi\theta(-x),$$

заменяя E (или ω) на $E \pm i0$ (ради определенности мы будем выбирать $E + i0$). Выражения для I_1, I_2 при $\xi \geqslant 2$ нам в дальнейшем не понадобятся, так как в соответствии со сделанным выше замечанием основной вклад в массовый оператор дает область $\xi \sim 0$; интегралы же по ξ, где $\xi \in [2, \infty]$, сходятся и имеют более высокий порядок по параметру α_1. Заметим также, что температурные поправки в выражениях (9) имеют указанный вид только вдали (по отношению к θ/ε_p) от их особенностей. Последнее ограничение связано с условиями применимости формулы (8).

В случае невырожденного газа ($\varepsilon_F \ll \theta$), полагая

$$n_k = e^{\mu/\theta}\exp\left\{-\frac{k^2}{2m\theta}\right\} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{\varepsilon_F}{\theta}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{k^2}{2m\theta}\right\}$$

и сохраняя только первые члены разложения поляризационного оператора по параметру ε_F/θ, получим после необходимых вычислений

$$I_1(q, E) = \frac{4\alpha_2}{\xi^3}\left(\frac{\varepsilon_F}{\theta}\right)\left[\left(\omega - \frac{\xi}{2}\right) - i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left\{-\left(\frac{\xi}{2} - \omega\right)^2\right\}\right],$$
$$I_2(q, E) = \frac{4\alpha_2}{\xi^3}\left(\frac{\varepsilon_F}{\theta}\right)\left[\left(\omega + \frac{\xi}{2}\right) - i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left\{-\left(\frac{\xi}{2} + \omega\right)^2\right\}\right] \tag{10}$$

при $\omega \lessgtr 1$.

§ 4. Энергия и затухание одночастичного возбуждения определяются как действительная и мнимая части значения переменной $E = E(p) = E_p \pm i\Gamma_p$, в котором продолжение функции Грина $G_p(E)$ на комплексную плоскость по E имеет полюс. Считая, что затухание мало в сравнении с энергией возбуждения ($\Gamma_p \ll E_p$), находим

$$E_p = \varepsilon_p + Re\{\mathfrak{M}_p(E_p)\},\ \Gamma_p = Im\{\mathfrak{M}_p(E_p)\}, \tag{11}$$

причем мнимая часть массового оператора на действительной оси E определяется как $Im\{\mathfrak{M}_p(E)\} = \pm Im\{\mathfrak{M}_p(E \mp i0)\}$. Представим массовый оператор (6) в следующем виде:

$$\mathfrak{M}_p(E) = \frac{e^2 P_0}{\pi\hbar}\int_0^\infty \xi^2 d\xi \int_{-1}^{1} dx \frac{1}{\xi^2}\left[\frac{I_1(q, E - \varepsilon_{p+q}) - n_{p+q}}{1 - I(q, E - \varepsilon_{p+q})}\right], \tag{12}$$

где $\xi = q/p_0$, $x = \cos(\vec{p}\vec{q})$.

Рассмотрим сначала случай низких температур. При $\vartheta = 0$, исходя из законов сохранения и принципа Паули, можно показать, что затухание возбуждения пропорционально $(p - p_F)^2$. Таким образом, формулы (11) имеют смысл (т. е. имеет смысл говорить о квазичастице с импульсом p) только при $p \sim p_F$. Поэтому мы будем искать разложение величин E_p и Γ_p по параметру $\left(\frac{p - p_F}{p_F}\right)$, сохраняя только первые неисчезающие члены разложения.

Подставляя в (12) выражения (9) и воспользовавшись формулой (8), находим главную асимптотику по α_1 энергии и затухания возбуждения при $\vartheta = 0$

$$E_p^{(0)} = \frac{p^2}{2m} - \mu^{(0)} + \frac{p_F^2}{2m}[-2\alpha_1 + 2\alpha_1^2(1 - \ln 2)\ln\alpha_1] +$$
$$+\left(\frac{p - p_F}{p_F}\right)\frac{p_F^2}{2m}(-2\alpha_1 - \alpha_1\ln\alpha_1),$$
$$\Gamma_p^{(0)} = \frac{p_F^2}{2m}\left(\frac{p_F - p}{p_F}\right)^2\frac{\pi^2}{16}\alpha_1^{1/2}. \tag{13}$$

Отсюда легко найти химический потенциал электронного газа при $\vartheta = 0$

$$\mu^{(0)} = \varepsilon_F[1 - 2\alpha_1 + 2\alpha_1^2(1 - \ln 2)\ln\alpha_1]. \tag{14}$$

Полученные выражения для $E_p^{(0)}$, $\Gamma_p^{(0)}$ и $\mu^{(0)}$ совпадают с известными результатами ряда работ [1]. Для температурных поправок к энергии и затуханию возбуждения (13) получаем (с точностью до $(\theta/\varepsilon_F)^2$

$$\delta E_p = -\delta\mu - \frac{p_F^2}{2m}\left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^2\frac{p_F}{p}\frac{\pi^2}{8}\alpha_1\left(1 - \frac{1}{3}\ln\alpha_1\right),$$
$$\delta\Gamma_p = \frac{p_F^2}{2m}\left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^2\frac{p_F}{p}\frac{\pi^4}{64}\alpha_1^{1/2}, \tag{15}$$

где $\delta\mu$ — поправка к химическому потенциалу.

В случае невырожденного газа, подставляя в уравнение (12) значения I_1 и I из формул (10) и выполняя интегрирование, находим следующее выражение для энергии и затухания возбуждения

$$E_p = \frac{p^2}{2m} - \mu - \frac{\hbar^2 k_D^2}{2m}\left(1 - \frac{p^2}{3m\vartheta}\right) - \frac{1}{2}k_D e^2,$$
$$\Gamma_p = -\vartheta \frac{me^2}{\hbar\sqrt{2\pi m\vartheta}} \ln\left(\frac{\hbar^2 k_D^2}{2m\vartheta}\right) \quad \text{для } p \sim \sqrt{m\vartheta}. \tag{16}$$

§ 5. Термодинамический потенциал системы $\Omega(\vartheta, V, \mu)$ определяется по известной формуле

$$\Omega - \Omega_0 = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle \lambda H_1 \rangle_\lambda, \tag{17}$$

где $\Omega_0(\vartheta, V, \mu)$ — потенциал идеального газа. Для того чтобы получить среднюю энергию недовключенного взаимодействия $\langle \lambda H_1 \rangle_\lambda$, воспользуемся известной теоремой, позволяющей находить средние через соответствующие функции Грина

$$\langle BA \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi i} \frac{G(A, B; E - i0) - G(A, B; E + i0)}{e^{E/\theta} + 1}.$$

Из уравнения движения (3) и уравнения Дайсона вытекает следующее равенство

$$\sum_{k,q} \frac{v(q)}{V} G(a_{k+q}^+ a_k a_{p+q}, a_p^+; E) = \mathfrak{M}_p(E) G_p(E).$$

Отсюда с помощью приведенной выше теоремы получаем

$$\langle \lambda H_1 \rangle_\lambda = \frac{1}{2} \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi i} \frac{\mathfrak{M}_p^\lambda(E - i0) G_p^\lambda(E - i0) - \mathfrak{M}_p^\lambda(E + i0) G_p^\lambda(E + i0)}{e^{E/\theta} + 1}.$$

В этом выражении заменим функцию Грина $G_p^\lambda(E)$ с точностью до e^4 на $G_p^{(0)}(E) = (E - \varepsilon_p)^{-1}$ и, представляя массовый оператор в виде $\mathfrak{M}_p(E \pm i0) = M_p(E) \mp i\Gamma_p(E)$, получим

$$\langle \lambda H_1 \rangle_\lambda = \frac{1}{2} \sum_p M_p^\lambda(\varepsilon_p) n_p - \frac{1}{2} \sum_p \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{\varepsilon_p - E} \frac{\Gamma_p^\lambda(E)}{e^{E/\theta} + 1}. \tag{18}$$

Найдем среднее $\langle \lambda H_1 \rangle_\lambda$ при $\vartheta = 0$. В этом случае множитель $(e^{E/\theta} + 1)^{-1}$ перейдет в ступенчатую функцию $\theta(-E)$. Учитывая, что величины $I_1(q, E)$, $I_2(q, E)$, определяемые формулами (7), при $\vartheta = 0$ обладают свойствами: $Im\{I_1(q, E)\} = 0$ при $E \leqslant 0$, $Im\{I_2(q, E)\} = 0$ при $E \geqslant 0$ интегральный член в (18) можно (с точностью до e^4) записать в виде

$$-\frac{1}{2} \sum_p \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{dE}{\varepsilon_p - E} \Gamma_p(E) \approx$$

$$\approx -\sum_p \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{dE}{\varepsilon_p - E} Im \left\{ \sum_q \frac{\nu(q)}{V} \frac{n_{p+q} I_2(q, E - \varepsilon_{p+q})}{1 - I(q, E - \varepsilon_{p+p})} \right\}.$$

Исходя из общих выражений для массового (6) и поляризационного (7) операторов, можно показать, что функция

$$\mathfrak{M}_p^{(2)}(E) = \sum_q \frac{\nu(q)}{V} \frac{n_{p+q} I_2(q, E - \varepsilon_{p+q})}{1 - I(q, E - \varepsilon_{p+q})}$$

не имеет никаких особенностей на комплексной плоскости E за исключением ветвления вдоль действительной оси (причем $\mathfrak{M}_p(E + i0) = \mathfrak{M}_p^*(E - i0)$) и удовлетворяет дисперсионным соотношениям обычного вида

$$Re\{\mathfrak{M}_p^{(2)}(E)\} = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE'}{E - E'} Im\{\mathfrak{M}_p^{(2)}(E)\}.$$

В соответствии с этим формулу (18) при $\vartheta = 0$ можно (с указанной точностью) представить в виде

$$\langle \lambda H_1 \rangle_\lambda = -\sum_{p,\, q} \frac{\lambda \nu(q)}{2V} n_p n_{p+q} +$$

$$+ Re \left\{ \sum_{p,\, q} \frac{\lambda \nu(q)}{2V} \frac{n_p (1 - n_{p+q}) \lambda I_1(q, \varepsilon_p - \varepsilon_{p+q}) - n_{p+q}(1 - n_p) \lambda I_2}{1 - \lambda I(q, \varepsilon_p - \varepsilon_{p+q})} \right\}.$$

Подставляя это выражение в (17), находим после стандартных вычислений термодинамический потенциал при $\vartheta = 0$:

$$\Omega - \Omega_0 = N\varepsilon_F \left[-\frac{3}{2} \alpha_1 + 2\alpha_1^2 (1 - \ln 2) \ln \alpha_1 \right]. \tag{19}$$

Отсюда получаем выражение для изменения энергии системы (по отношению к энергии идеального газа)

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = N\varepsilon_F \left[-\frac{3}{2} \alpha_1 + 2\alpha_1^2 (1 - \ln 2) \ln \alpha_1 \right],$$

совпадающее с результатом Гелл-Манна и Бракнера [8].

Переходя к вычислению потенциала Ω для случая высоких температур, запишем выражение (18) с помощью формулы (6) в следующем виде:

$$\langle \lambda H_1 \rangle_\lambda = Re \sum_{p,\, q} \frac{\lambda^2 \nu(q)}{2V} \frac{n_p I_1}{1 - \lambda I} - \sum_{p,\, q} \frac{\lambda \nu(q)}{2V} n_p n_{p+q} -$$

$$- Re \sum_{p,\, q} \frac{\lambda^2 \nu(q)}{2V} \frac{n_p n_{p+q} I}{1 - \lambda I} - \sum_p \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{\varepsilon_p - E} \frac{\Gamma_p^\lambda}{e^{E/\theta} + 1}.$$

Ограничиваясь вычислением первых двух членов в этом выражении, получим

$$\langle \lambda H_1 \rangle_\lambda = -\lambda^{3/2} \cdot \frac{1}{2} k_D e^2 N - \lambda \cdot \frac{1}{2} N \frac{\hbar^2 k_D^2}{2m}.$$

Оставшиеся члены имеют более высокий порядок по параметру $\alpha_2 \sim \frac{n^{1/3} e^2}{\theta}$.

Отсюда для термодинамического потенциала имеем

$$\Omega - \Omega_0 = -\frac{1}{3} k_D e^2 N - \frac{1}{2} N \frac{\hbar^2 k_D^2}{2m}. \tag{20}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой обычную дебаевскую поправку к термодинамическому потенциалу, второе — описывает квантовые поправки, связанные с обменным взаимодействием между частицами. Аналогичные результаты были получены в работах [9] с помощью причинных функций Грина.

Изменения термодинамического потенциала и свободной энергии при малом отклонении системы от идеальности ($\alpha_2 \ll 1$) равны друг другу (причем первое берется при постоянном химическом потенциале, а второе — при постоянном числе частиц). Поэтому изменение свободной энергии можно записать в виде

$$F - F_0 = -\frac{1}{3} k_D e^2 N - \frac{1}{2} N \frac{\hbar^2 k_D^2}{2m}.$$

Отсюда для химического потенциала (входящего в формулу (16)) имеем

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,\vartheta} = \mu_0 - \frac{1}{2} k_D e^2 - \frac{\hbar^2 k_D^2}{2m}. \tag{21}$$

В заключение приношу свою благодарность И. А. Квасникову, под руководством которого была выполнена эта работа, а также В. П. Олейникову за полезные дискуссии и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Quin J., Ferrell R. Phys. Rev., **112**, 812, 1958; Ritchie R. Phys. Rev., **114**, 644, 1959.
2. Бонч-Бруевич В. Л. ДАН СССР, **126**, 539, 1959; Кудинов Е. К., Павлов С. Т. ЖЭТФ, **42**, 839, 1962.
3. Боголюбов Н. Н. Лекции по квантовой статистике. Киев, «Наукова думка», 1949.
4. Suhl H., Werthamer N. Phys. Rev., **122**, 359, 1961; Suhl H., Werthamer N. Phys. Rev., **125**, 1402, 1962.
5. Bardeen J. Phys. Rev., **50**, 1098, 1936.
6. Олейников В. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 5, 13, 1968.
7. Кулик И. О. ЖЭТФ, **40**, 1343, 1961.
8. Gell—Mann M., Brueckner K. Phys. Rev., **106**, 364, 1957.
9. Фрадкин Е. С. ЖЭТФ, **36**, 1286, 1959; Веденов А. А., Ларкин А. И. ЖЭТФ, **36**, 1133, 1959.
10. Зубарев Д. Н. «Успехи физических наук», **71**, 71, 1960.

Поступила в редакцию
1.12 1967 г.

Кафедра
квантовой статистики