Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1968

УДК 517.9 : 535.4

А. С. ИЛЬИНСКИЙ, В. В. КРАВЦОВ, А. Г. СВЕШНИКОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ЗАДАЧАХ О РАССЕЯНИИ ВОЛН В ПОЛЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

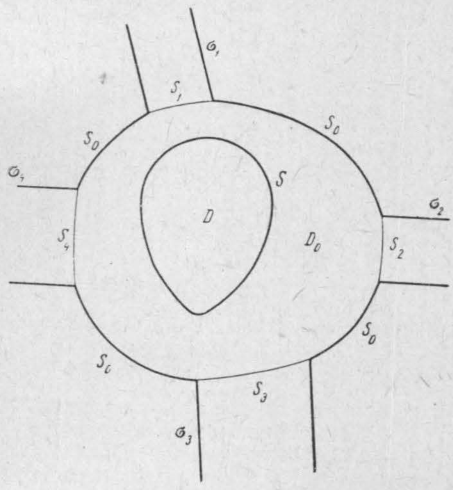
Задача о рассеянии волн на посторонних включениях в полых направляющих системах сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода по поверхности включения с регулярным ядром, которое выражается через функцию Грина пустой системы. Доказана единственность решения полученного уравнения. Рассмотрены различные типы включений: хорошо проводящее тело, диэлектрическое тело и тело с переменными характеристиками.

В последнее время разработаны общие методы исследования нерегулярных волноводов, имеющих диэлектрические, плазменные или ферритовые включения [1, 2]. Однако до сих пор практически не существует общего метода исследования полых систем с идеально или хорошо проводящими включениями. В данной работе предлагается общий метод исследования распространения и рассеяния волн в направляющих системах, имеющих металлические, диэлектрические или неоднородные включения. Метод основан на сведении рассматриваемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Он является дальнейшим развитием работы [3], в которой интегральные уравнения первого рода используются для исследования задач дифракции волн различной природы. Метод интегральных уравнений удобен при изучении локальной структуры поля в системе (особенно вблизи нерегулярной поверхности или на ней). В настоящей работе для простоты рассматривается скалярный случай.

§ 1. Рассеяние волн на металлических включениях

Рассмотрим систему, которая по установившейся терминологии называется волноводным трансформатором. Волноводный трансформатор представляет собой некоторую полость D_0, к которой присоединено несколько регулярных волноводов (см. рис.). Поверхность полости D_0 будем обозначать через S_0, поверхность волноводов — через $\sigma_\nu = (\nu = 1, 2, \dots, p)$. Внутри полости D_0 помещено тело D, ограниченное поверхностью S. Будем предполагать, что стенки волноводов идеальны, а поверхности S_0 и S обладают достаточно большой проводимостью, так что на них выполняются импедансные граничные условия. Пусть внутри волноводного трансформатора имеются источники, плотность распределения которых определяется локальной функцией $f(P)$ ($f(P) \neq 0$ в области V). Будем также считать, что волноводный трансформатор возбуждается через волновод номера ν_0 собственной волной m_0 этого волновода.

Скалярная (акустическая) задача об определении поля $u(M)$ в такой системе ставится следующим образом. Найти функцию $u(M)$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца:



$$\Delta u + k^2 u = -f(M) \text{ в } D_0 - D, \quad (1)$$

граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(P)\, u\,|_{S_0+S} = 0,$$
$$N[u]\,|_{\sigma_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p \quad (2)$$

и парциальным условиям излучения в произвольном сечении S_ν регулярного волновода [4]:

$$\int\limits_{S_\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + i\gamma_\nu^m u \right) \varphi_\nu^m(P)\, dS_p =$$

$$= 2i\gamma_{m_0}^{\nu_0} A e^{i\gamma_{m_0}^{\nu_0} z}\Big|_{S_{\nu_0}} \delta_{mm_0}\delta_{\nu\nu_0}, \quad (m = 1, 2, \ldots, \nu = 1, 2, \ldots, p). \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения: оператор $N[u]$ равен u для задачи Дирихле и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_\nu}$ для задачи Неймана; S_ν — поперечное сечение ν-того регулярного волновода, $\varphi_\nu^m(P)$ — мембранные функции этого сечения, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям; γ_m^ν — постоянные распространения в ν-том волноводе; A — амплитуда волны, которой возбуждается рассматриваемая система; $Im\, \gamma_{m_0}^{\nu_0} = 0$. Условия (3) обеспечивают единственность решения задачи (1) — (3). Будем предполагать, что поверхности S и S_0 удовлетворяют условиям существования решения [5] задачи (1) — (3).

Пусть $G(M, P)$ — функция Грина пустого трансформатора, т. е. функция, удовлетворяющая в D_0 уравнению Гельмгольца:

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(M, P),$$

граничным условиям:

$$\frac{\partial G}{\partial n} + h(P)\, G\Big|_{P \in S_0} = 0,$$
$$N[G]\,|_{P\in\sigma_\nu} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

и парциальным условиям излучения в сечениях S_ν.

Применяя формулу Грина в области D_0—D к функциям $u(P)$ и $G(M, P)$ и используя граничные условия на поверхности S_0, получим следующее выражение для поля внутри волноводного трансформатора:

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(P)\,G(M,P)-u(P)\frac{\partial G}{\partial n_p}(M,P)\right\}dS_p+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\,i\gamma_{m_0}^{\nu_0}AG_{m_0}^{\nu_0}(M)+\frac{1}{4\pi}\int_V G(M,P)\,f(P)\,d\tau_p, \tag{4}$$

где точка $M\in D_0-D$, $\vec{n}$ — нормаль, внешняя по отношению к области D_0-D,

$$G_{m_0}^{\nu_0}(M)=\int_{S_{\nu_0}}G(M,P)\,\varphi_{m_0}^{\nu_0}(P)\,dS_p.$$

Формула (4) показывает, что для определения поля $u(M)$ внутри волноводного трансформатора необходимо знать как $u(P)$, так и $\frac{\partial u}{\partial n}(P)$ на поверхности S. Значения $\left.\frac{\partial u}{\partial n}(P)\right|_S$ можно исключить, используя граничное условие (2), а для определения $u|_S$ следующим образом получается интегральное уравнение первого рода. Применим формулу Грина в области D_0-D к функциям $u(P)$ и $G(M,P)$, считая, что точка M расположена в области D. Тогда получим:

$$\oint_S\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(P)\,G(M,P)-u(P)\frac{\partial G}{\partial n_p}(M,P)\right\}dS_p=F(M), \tag{5}$$

$$(M\in D)$$

где

$$F(M)=-2i\gamma_{m_0}^{\nu_0}AG_{m_0}^{\nu_0}(M)-\int_V G(M,P)\,f(P)\,d\tau_p.$$

Используя граничное условие (2), перепишем (5) в виде:

$$\oint_S\left\{\frac{\partial G}{\partial n_p}(M,P)+h(P)\,G(M,P)\right\}u(P)\,dS_p=-F(M). \tag{6}$$

$$(M\in D)$$

Это уравнение и является интегральным уравнением Фредгольма первого рода для определения функции $u(P)|_S$. Существование решения уравнения (6) вытекает из предположения, что краевая задача (1)—(3) имеет решение. Легко доказать, точно так же как это сделано в работе [3] и будет сделано далее при рассмотрении более сложного случая дифракции на неоднородном включении, что интегральное уравнение (6) имеет единственное решение.

Решив уравнение (6) и определив $\left.\frac{\partial u}{\partial n}(P)\right|_S$ из граничного условия (2), вычислим поле $u(M)$ всюду внутри волноводного трансформатора квадратурой по формуле (4). Зная полное поле в системе, нетрудно определить его любые интегральные характеристики (коэффициенты прохождения, отражение и др.). Отметим, что этот метод исследования рассеяния волн в полых системах особенно удобен при изучении локальной структуры поля в системе.

Таким образом, задача о рассеянии волн в волноводном трансформаторе сведена к интегральному уравнению первого рода. Ядро интегрального уравнения выражается через функцию Грина пустого (свободного) волноводного трансформатора. Эта функция выписывается в замкнутом (явном) виде в исключительных случаях. Однако ее вычисление с необходимой точностью может быть проведено численными методами [6]. Следует отметить, что интегральное уравнение, аналогичное уравнению (6), можно получить, взяв функцию Грина не третьей, а первой или второй краевой задачи. Заметим, наконец, что аналогично рассматривается и задача с граничным условием

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}+u\Big|_{S_0+S}=0. \tag{2'}$$

§ 2. Рассеяние волн на неоднородном включении внутри волноводного трансформатора

Перейдем к рассмотрению более сложного случая рассеяния волн на прозрачном неоднородном теле, находящемся внутри волноводного трансформатора. Рассмотрим тот же самый волноводный трансформатор, что и в § 1, но будем считать, что помещенное внутри трансформатора тело D является прозрачным и неоднородным, т. е. его характеристики зависят от координат. Обозначим поле в области D_0—D через $u(M)$, а поле в области D — через $u_1(M)$. Тогда для определения этих функций получим следующую краевую задачу: найти функции $u(M)$ и $u_1(M)$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{gathered}\Delta u+k^2u=-f(M)\ \text{в}\ D_0-D,\\ Lu_1=0\ \text{в}\ D,\end{gathered} \tag{7}$$

где Lu_1 — некоторый линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят от свойств среды в области D, граничным условиям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial n}+h(P)\,u\Big|_{S_0}=0,\\ N[u]\,|_{\sigma_\nu}=0\quad(\nu=1,2,\ldots,p),\\ u|_S=u_1|_S,\ \ \varepsilon(P)\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=\varepsilon_1(P)\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S\end{gathered} \tag{8}$$

и парциальным условиям излучения в любом сечении S_ν регулярного волновода:

$$\int\limits_{S_\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+i\gamma_m^\nu u\right)\varphi_m^\nu dS_p=2i\gamma_{m_0}^{\nu_0}Ae^{i\gamma_{m_0}^{\nu_0}z}\Big|_{S_{\nu_0}}\delta_{mm_0}\delta_{\nu\nu_0} \tag{9}$$

(все обозначения имеют тот же смысл, что и в § 1). Функции $\varepsilon(P)$ и $\varepsilon_1(P)$ определяются свойствами среды в $D+S$.

Будем предполагать, что поставленная краевая задача (7)—(9) имеет решение и при этом единственное.

Сведем задачу (7)—(9) к интегральному уравнению. Применим формулу Грина в области D_0—D к функциям $u(P)$ и $G(M,P)$, где $G(M,P)$ — функция Грина пустого волноводного трансформатора, определенная в § 1. Если точка $M\in D$, то, используя граничные условия, получим

$$\oint\limits_S\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(P)\,G(M,P)-u(P)\frac{\partial G}{\partial n_p}(M,P)\right\}dS_p=F(M),$$
$$(M\in D) \tag{10}$$

где

$$F(M)=-2i\gamma_{m_0}^{\nu_0}AG_{m_0}^{\nu_0}(M)-\int\limits_V G(M,P)f(P)\,d\tau_p.$$

Пусть $G_2(M, P)$ есть функция Грина второй краевой задачи для уравнения $Lu_1 = 0$ в области D.

Тогда

$$u_1(Q) = \oint_S G_2(Q, N) \frac{\partial u_1}{\partial n_N}(N)\, dS_N, \tag{11}$$

где $Q \in D + S$. Поместим точку Q на поверхность S. Тогда в силу граничных условий получим:

$$u_1(Q)\big|_S = u(Q)\big|_S,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(Q)\bigg|_S = \frac{\varepsilon(Q)}{\varepsilon_1(Q)} \frac{\partial u}{\partial n}(Q)\bigg|_S \tag{12}$$

(предполагаем, что $\varepsilon_1(Q) \neq 0$ на поверхности S).

Из (12) и (11) получаем

$$u(P) = \oint_S G_2(P, N) \frac{\varepsilon(N)}{\varepsilon_1(N)} \frac{\partial u}{\partial n}(N)\, dS_N, \quad P \in S. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (10) и изменяя порядок интегрирования, получаем интегральное уравнение для $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$

$$\oint_S \left\{ G_2(M, P) - \frac{\varepsilon(P)}{\varepsilon_1(P)} W_2(M, P) \right\} \frac{\partial u}{\partial n}(P)\, dS_p = F(M), \tag{14}$$

$$(M \in D)$$

где функция $W_2(M, P)$ есть свертка функций $\frac{\partial G_2}{\partial n_N}(M, N)$ и $G_2(N, P)$. Заметим, что функция $W_2(M, P)$, как функция точки P, может рассматриваться как решение следующей внутренней краевой задачи:

$$L_p W_2 = 0, \quad P \in D,$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial n_p}\bigg|_S = \frac{\partial G_2}{\partial n_p}(M, P)\bigg|_S, \quad M \in D$$

(при таком построении функции $W_2(M, P)$ точка M является параметром).

Полученное интегральное уравнение (14) имеет решение. Это следует из предположения, что решение исходной краевой задачи существует. Уравнение, аналогичное (14), для внешней задачи дифракции получено в работе [7].

Теперь покажем, что непрерывное решение уравнения (14) единственно. Рассмотрим однородное уравнение:

$$\oint_S \left\{ G_2(M, P) - \frac{\varepsilon(P)}{\varepsilon_1(P)} W_2(M, P) \right\} \frac{\partial u}{\partial n}(P)\, dS_p = 0$$

$$(M \in D)$$

и предположим, что оно имеет нетривиальное решение $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \mu(P) \not\equiv 0$.

Построим функцию

$$V(M) = \oint_S \left\{ G_2(M, P) - \frac{\varepsilon(P)}{\varepsilon_1(P)} W_2(M, P) \right\} \mu(P)\, dS_p.$$

Эта функция в области D обращается тождественно в нуль, ~~а~~ и в области $D_0 - D$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, на поверхностях S_0 и σ_ν $(\nu = 1, 2, \dots, p)$ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$\frac{\partial V}{\partial n} + hV \Big|_{S_0} = 0,$$

$$N[V]\,|_{\sigma_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, p)$$

в произвольных сечениях S_ν волноводов удовлетворяет парциальным условиям излучения, и на поверхности S в силу непрерывности при переходе через S также обращается в нуль. Поэтому из теоремы единственности для краевой задачи (7)—(9) вытекает, что $V(M) \equiv 0$ в $D_0 - D$. Теперь, используя разрывные свойства $\frac{dV}{dn}(M)$ при переходе через поверхность S, находим, что $\mu(P) \equiv 0$ в точках непрерывности. Следовательно, однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а решение уравнения (14) единственно.

Решив уравнение (14), найдем $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S$. Для определения $u|_S$ надо либо решить внутреннюю краевую задачу

$$Lu_1 = 0 \text{ в } D,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_S = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S, \tag{15}$$

либо интегральное уравнение

$$\oint\limits_S \frac{\partial G}{\partial n_p}(M, P)\, u(P)\, dS_p = \oint\limits_S G(M, P) \frac{\partial u}{\partial n}(P)\, dS_p +$$

$$+ 2i\gamma_{m_0}^{\nu_0} A G_{m_0}^{\nu_0}(M) + \int\limits_V G(M, P) f(P)\, d\tau_p, \tag{16}$$

$$(M \in D)$$

которое выводится так же, как и аналогичное уравнение в § 1. После этого поле в области $D_0 - D$ вычисляется квадратурами по формуле Грина, а поле в области D определено при решении краевой задачи (15).

Таким образом, задача рассеяния волн на неоднородном теле в волноводном трансформаторе сведена к интегральному уравнению первого рода по поверхности S, причем ядро уравнения является решением внутренней краевой задачи. Для решения обоих этапов задачи существуют эффективные численные методы. Внутренняя краевая задача может быть решена разностным методом, а интегральное уравнение первого рода — методом регуляризации А. Н. Тихонова [8].

При выводе интегрального уравнения (14) предполагалось, что существует функция Грина $G_2(M, P)$ внутренней задачи Неймана для уравнения $Lu_1 = 0$. Если внутренняя задача Неймана неразрешима, то можно воспользоваться функцией Грина $G_1(M, P)$ для внутренней задачи Дирихле. Тогда вместо уравнения (14) получим следующее уравнение:

$$\oint\limits_S \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial n_p}(M, P) - \frac{\partial G}{\partial n_p}(M, P) \right\} u(P)\, dS_p = F(M), \tag{17}$$

$$(M \in D)$$

где функция $W_1(M, P)$ определяется как решение внутренней задачи:

$$L_p W_1 = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$W|_{P\in S} = \frac{\varepsilon(P)}{\varepsilon_1(P)} G_1(M, P)|_{P\in S}.$$

Определив $u(P)|_S$ из уравнения (17), находим $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_S$, решая внутреннюю задачу Дирихле:

$$Lu_1 = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$u_1|_S = u|_S$$

и поле в области $D_0 - D$ вычисляется по формуле Грина.

§ 3. Рассеяние волн на прозрачном однородном теле внутри волноводного трансформатора

Рассмотрим частный случай, когда можно обойти этап решения внутренней краевой задачи для построения ядра интегрального уравнения. Предположим, что характеристики тела D постоянны и отличаются от характеристик среды внутри волноводного трансформатора. Тогда для определения поля в трансформаторе надо решить краевую задачу (7)—(9), считая, что $\varepsilon = \text{const}$, $\varepsilon_1 = \text{const}$, $Lu_1 = \Delta u_1 + k^2_1 u_1$, где k_1 — волновое число в области D. В этом случае можно получить систему интегральных уравнений для определения $u|_S$ и $\frac{du}{dn}|_S$. Применим формулу Грина в области D к функциям $u_1(P)$ и

$$\psi_1(M, P) = \frac{e^{ik_1 R_{MP}}}{R_{MP}},$$

где R_{MP} — расстояние между точками M и P; считая, что точка M лежит вне области $D + S$, получим

$$\oint_S \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial n}(P)\,\psi_1(M, P) - u_1(P)\frac{\partial \psi_1}{\partial n}(M, P)\right\} dS_p = 0. \tag{18}$$

$$(M \notin D + S)$$

Учитывая условия сопряжения на поверхности S

$$u_1 = u|_S, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_S = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$$

и принимая во внимание уравнение (10), получим систему уравнений первого рода для определения $u|_S$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$:

$$\oint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(P)\,G(M, P) - u(P)\frac{\partial G}{\partial n}(M, P)\right\} dS_p = F(M),$$

$$(M \in D) \tag{19}$$

$$\oint_S \left\{ \varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}(P)\,\psi_1(M, P) - \varepsilon_1 u(P)\frac{\partial \psi_1}{\partial n}(M, P)\right\} dS_p = 0.$$

$$(M \notin D + S)$$

Доказательство единственности решения системы уравнений (19) проводится так же, как и раньше. После решения системы (19) определяются $u_1|_S$ и $\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_S$ из граничных условий и поле в областях D и $D_0 - D$ вычисляется по формулам Грина.

Развитый метод интегральных уравнений первого рода обобщается на более сложные задачи (электромагнитный случай и др.) и позволяет исследовать широкий класс направляющих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г., Ильинский А. С. ДАН СССР, **176**, № 2, 1967.
2. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М., «Наука», 1967.
3. Кравцов В. В. Интегральные уравнения в задачах дифракции. Сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. V. Изд-во МГУ, 1966, стр. 260—293.
4. Свешников А. Г. ДАН СССР, **73**, № 5, 917, 1950.
5. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
6. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 5, 1968.
7. Кравцов В. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 1968.
8. Тихонов А. Н. ДАН СССР, **151**, № 3, 501, 1963.

Поступила в редакцию
13.12 1967 г.

Кафедра
математики