Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1968

УДК 519.24

Л. И. МИРКИН, Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МАРКОВСКОГО СИГНАЛА НА ДВА СОСТОЯНИЯ

Приводится синтез оптимальной фильтрующей системы и дается оценка по среднеквадратичному критерию качества интерполяции и экстраполяции марковского сигнала на два состояния. Получены решения стационарной и нестационарной задачи.

Сигнал, прошедший через канал связи, искажен случайными помехами, что делает измерения его величины на выходе канала не вполне достоверными. Задачей фильтрации является наилучшая в некотором смысле оценка сигнала или его параметров по измерениям выходной величины.

Отправной точкой при определении метода оптимальной фильтрации служит знание способа комбинирования сигнала и помехи, а также априорные статистические сведения о них. Принимая во внимание критерий качества фильтрации, можно найти ее оптимальный вариант. При этом зачастую наиболее удобным является критерий минимума среднеквадратичной ошибки фильтрации.

С помощью этого критерия в работах Колмогорова [1] и Винера [2] была найдена оптимальная линейная фильтрация стационарных случайных процессов и последовательностей при бесконечном и полубесконечном интервале наблюдения.

Эта теория и ее обобщения на нестационарные случаи изложены сейчас во многих учебниках (например [3—8]). Линейная теория основывается на нахождении и решении уравнений линейной регрессии (в частности интегрального уравнения Винера—Хопфа). Трудности метода состоят в том, что уравнения не всегда решаются, особенно в случаях с конечным интервалом наблюдения.

Оптимальный линейный фильтр можно построить, используя метод, разработанный в [9, 10—12] для нелинейной фильтрации и основанный на теории марковских процессов. При этом задача сводится к рассмотрению системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс фильтрации, устраняется необходимость решать уравнения Винера — Хопфа, а получающиеся уравнения нечувствительны к изменению длительности наблюдения. Аналогичные результаты для линейной фильтрации были получены Калмэном [13, 14].

В данной работе рассматривается задача линейной фильтрации марковского сигнала на два состояния. При этом исследуются оптималь-

ный алгоритм и качество фильтрации с запаздыванием (интерполяция), с опережением (прогнозирование) и чистой фильтрации. В таком объеме данная задача не была рассмотрена (вид алгоритма для данной задачи приведен в [8]).

Решение задачи находится параллельно методом условных марковских процессов и методом Винера. Данная работа лишь часть более обширной работы, посвященной сравнению линейных и нелинейных методов фильтрации.

§ 1. Синтез линейной фильтрующей системы с помощью теории условных марковских процессов

Фильтруемым сигналом является негауссов марковский процесс на два состояния $\eta(t) = \pm 1$. Эволюция априорных вероятностей $P\{\eta(t) = \pm 1\} = p_{1,2}$ зададим уравнениями

$$\dot{p}_1 = -\dot{p}_2 = -\mu p_1 + \nu p_2. \tag{1}$$

Наблюдается сумма сигнала $\eta(t)$ и белого шума $\xi(t)$ или, что по существу то же самое, наблюдается процесс

$$y(t) = \int_0^t \eta(t')\,dt' + \zeta(t), \tag{2}$$

где $\zeta(t)$ — винеровский процесс; $M\Delta\zeta = 0$; $M\Delta\zeta^2 = N\Delta t$.

Будем по наблюдению процесса $y(t)$ на интервале $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, который сокращенно запишем как $y_{t_0}^T$, оценивать значение сигнала $\eta(\sigma)$. Случаю $T-\sigma>0$ соответствует фильтрация с запаздыванием, случаю $\sigma-T>0$ — фильтрация с опережением или иначе — прогнозирование. Если обозначить $T-\sigma=\tau$, то эти случаи будут классифицироваться знаком τ.

Фильтрацию сигнала будем производить с помощью апостериорных вероятностей $P\{\eta(\sigma) \mid y_{t_0}^T\}$, а именно

$$\eta_0(T, \sigma) = M[\eta(\sigma) \mid y_{t_0}^T]. \tag{3}$$

В теории условных марковских процессов [9] апостериорные вероятности $P\{\eta(\sigma) \mid y_{t_0}^T\}$ выражаются через систему апостериорных мер: финальную $W_\sigma(d\eta_\sigma)$ и вспомогательную $\widetilde{V}_\sigma^T(\eta(\sigma)\,\Omega)$. Эволюция апостериорных мер описывается уравнениями, определяемыми априорными сведениями о помехе, и наблюдением $y(t)$. При этом финальная апостериорная мера $W_\sigma(\eta_\sigma) = P\{\eta(\sigma) \mid y_{t_0}^\sigma\}$ определяет чистую фильтрацию и участвует в формировании апостериорной вероятности для всех остальных случаев. Вспомогательная мера $\widetilde{V}_\sigma^T(\eta(\sigma), \Omega)$ используется лишь в случае запаздывания, когда

$$P\{\eta(\sigma) \mid y_{t_0}^T\} = W_\sigma(\eta_\sigma) \cdot \widetilde{V}_\sigma^T(\eta_\sigma, \Omega). \tag{4}$$

Линейную фильтрацию $\eta(t)$ найдем как частный случай нелинейной, применяя методы нелинейной фильтрации к вспомогательному гауссовому процессу с корреляционными функциями исходного сигнала $\eta(t)$. Этот прием основан на хорошо известном факте, что оптимальное преобразование гауссового сигнала при квадратичном критерии качества линейно и, следовательно, нелинейная фильтрация вспомогательного

гауссового процесса будет соответствовать линейной фильтрации сигнала $\eta(t)$.

Корреляционные функции процессов $\eta(t)$ и $y(t)$, как нетрудно проверить, имеют вид

$$K_{\eta\eta}(\tau) = \frac{4\mu v}{(\mu+v)^2} e^{-(\mu+v)|\tau|}; \quad K_{\eta\dot{y}}(\tau) = K_{\eta\eta}(\tau), \tag{5}$$

$$K_{\dot{y}\dot{y}}(\tau) = K_{\eta\eta}(\tau) + N\delta(\tau).$$

Плотность распределения вероятностей гауссового процесса с корреляционными функциями (5) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p_0}{\partial t}(\eta, t) = \frac{4\mu v}{\mu+v} \frac{\partial^2 p_0(\eta, t)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \{[(\mu+v)\eta - (v-\mu)]\, p_0(\eta, t)\}$$

или в другой форме

$$\frac{\partial p_0}{\partial t}(\eta, t) = B \frac{\partial^2 p_0}{\partial \eta^2}(\eta, t) - \frac{\partial}{\partial \eta}[G(\eta)\, p_0(\eta, t)], \tag{6}$$

где

$$\alpha = \mu + \nu, \ \beta = \nu - \mu, \ \gamma = \mu\nu,$$

$$B = \frac{4\mu\nu}{\mu+\nu} = \frac{4\gamma}{\alpha} \text{ и } G(\eta) = -(\mu+\nu)\eta + (\nu-\mu) = -\alpha\eta + \beta. \tag{7}$$

В результате уравнения для апостериорных мер $W_\sigma(d\eta_\sigma)$ и $\widetilde{V}_\sigma^T(\eta_\sigma, \Omega)$, полученные в работах [9, 11], примут вид

$$\frac{\partial w_\sigma}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}[B w_\sigma] - \frac{\partial}{\partial \eta}[G(\eta) w_\sigma] + [F(\eta, \dot{y}) - M_{ps} F]\, w_\sigma, \tag{8}$$

$$-\frac{\partial \widetilde{V}_\sigma^T}{\partial \sigma}(\eta, \Omega) = B \frac{\partial^2 \widetilde{V}}{\partial \eta^2} + G(\eta) \frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \eta} + [F(\eta, \dot{y}) - M_{ps} F]\, \widetilde{V} \tag{9}$$

при начальных условиях $w_{t_0}(\eta) = w_0$; $\widetilde{V}_T^T(\eta, \Omega) = 1$,
где

$$w_\sigma(\eta) = \frac{W_\sigma(d\eta_\sigma)}{d\eta_\sigma}; \quad F(\eta, \dot{y}) = \frac{1}{N}\left(\dot{y}\eta - \frac{\eta^2}{2}\right) = F_1 \cdot \eta + F_2 \cdot \eta^2.$$

Для случая прогнозирования ($\tau < 0$) получаем уравнение

$$\frac{\partial p_\sigma(\eta)}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}[B p_\sigma] - \frac{\partial}{\partial \eta}[G(\eta)\, p_\sigma] \tag{10}$$

с начальным условием $p_T(\eta) = w_T(\eta)$,
где

$$p_\sigma(\eta) = \frac{P\{d\eta_\sigma \mid y_{t_0}^T\}}{d\eta_\sigma}.$$

Решения уравнений (8 — 10) будем искать в виде:

$$w_\sigma(\eta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(\sigma)\eta^2 + \psi(\sigma)\eta + C_1(\sigma)\right], \tag{11}$$

$$\widetilde{V}_\sigma^T(\eta, \Omega) = \exp\left[-\frac{1}{2} d(\sigma, \tau)\eta^2 + h(\sigma, \tau)\eta + C_2(\sigma, \tau)\right], \tag{12}$$

$$p_\sigma(\eta) = \exp\left[-\frac{1}{2} a(\sigma)\eta^2 + b(\sigma)\eta + C(\sigma)\right]. \tag{13}$$

И результат фильтрации — оценка $\eta_0(\sigma, \tau)$ будет согласно (3) определяться выражениями

$$(\tau > 0); \quad \eta_0(\sigma, \tau) = \frac{h+\psi}{d+\varphi}(\sigma, \tau); \quad (\tau < 0); \; \eta_0(\sigma, \tau) = \frac{b}{a}(\sigma, \tau);$$

$$(\tau = 0); \quad \eta_0(T, \tau) = \frac{\psi}{\varphi}(T).$$

Подставляя решения (11 — 13) в уравнения (8 — 10), а затем, собирая коэффициенты при равных степенях η, получим уравнения для параметров, определяющих оценку сигнала

$$\begin{cases} \dot{d} = 2(Bd^2 + \alpha d + F_2), \\ \dot{h} = 2Bdh + \alpha h - F_1 + \beta d, \end{cases} \quad d(\tau, \tau) = h(\tau, \tau) = 0, \tag{14}$$

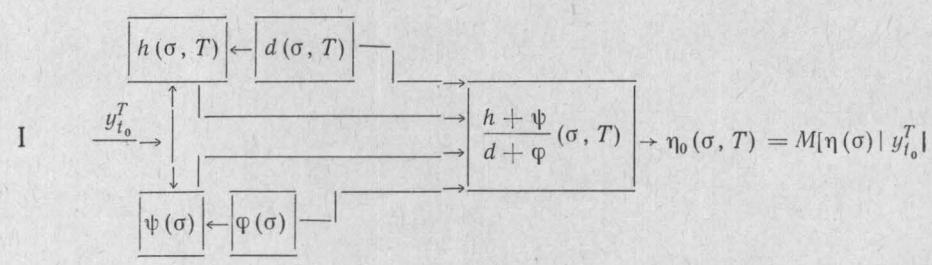
$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -2(B\varphi^2 - \alpha\varphi + F_2), \\ \dot{\psi} = -2B\varphi\psi + \alpha\psi + F_1 + \beta\varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \psi(t_0) = \psi_0, \end{cases} \tag{15}$$

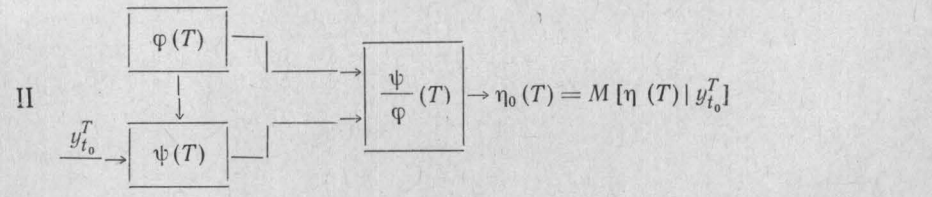
$$\begin{cases} \dot{a} = -2(Ba^2 - \alpha a) \\ \dot{b} = -(2Bab - \alpha b - \beta a) \end{cases} \quad \begin{cases} a(\tau) = \varphi(T) \\ b(\tau) = \psi(T). \end{cases} \tag{16}$$

Здесь уравнения (15) определяют чистую фильтрацию, уравнения (15, 14) — запаздывание и система уравнения (15, 16) — прогнозирование. Блок-схемы фильтрующих систем, соответствующие этим случаям, иллюстрируются следующей схемой.

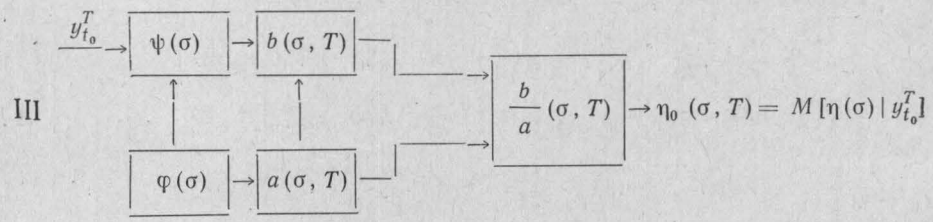
(I — случай интерполяции, II — фильтрации, III — прогнозирования)

$(\sigma \leqslant T)$





$(\sigma \geqslant T)$



При этом необходимо отметить, что решение уравнений (14), соответствующих фильтрации с запаздыванием, т. е. некоторому возвращению назад от момента T, происходит в «обратном» времени (от T к σ, где $\sigma \leqslant T$). При таком ходе решения значения параметров d и h являются устойчивыми.

§ 2. Качество линейной фильтрации, рассчитанной методом условных марковских процессов

Для определения качества линейной фильтрации сигнала, осуществляемой согласно уравнениям (14—16), найдем средний квадрат ошибки фильтрации

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T) = M\{[\eta(\sigma) - \eta_0(\sigma, T)]^2\} = MM\{[\eta(\sigma) - \eta_0(\sigma, T)]^2 \mid y_{t_0}^T\}. \quad (17)$$

Определенная таким образом средняя ошибка будет совпадать с апостериорной дисперсией вспомогательного гауссового процесса, т. е.

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, \tau) = \frac{1}{d(\tau, \sigma) + \varphi(\sigma)} \qquad (\tau > 0); \quad (18)$$

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, \tau) = \frac{1}{a(\sigma, \tau)} \qquad (\tau < 0). \quad (19)$$

Значения параметров d, φ, a находим из соответствующих уравнений систем (14, 15 и 16). Этими решениями будут

$$\varphi(\sigma) = \frac{\alpha^2}{8\gamma}[1 + \Delta \operatorname{th}\{\alpha\Delta(\sigma - t_0 + \tau_0)\}], \quad (20)$$

где $\varphi(t_0) = a_0$ и

$$\tau_0 = \frac{1}{\alpha\Delta} \operatorname{arth} \frac{2a_0 - \frac{\alpha^2}{4\gamma}}{\frac{\alpha^2}{4\gamma}\Delta},$$

$$d(\tau) = -\frac{\alpha^2}{8\gamma}[1 - \Delta \operatorname{th}\{\alpha\Delta(\tau + \tau_1)\}] \qquad (\tau > 0), \quad (21)$$

где

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha\Delta} \operatorname{arth} \frac{1}{\Delta},$$

$$a(\tau) = \frac{\varphi(\sigma)e^{-2\alpha\tau}}{1 + \varphi(\sigma)\frac{4\gamma}{\alpha^2}(e^{-2\alpha\tau} - 1)} \qquad (\tau < 0). \quad (22)$$

В этих выражениях использовано сокращение:

$$\Delta = \sqrt{1 + \frac{8\gamma}{\alpha^3 N}}.$$

Подставляя значения параметров из (20—22) в формулы (18, 19), получим оценку качества линейной фильтрации при конечном интервале наблюдения по критерию среднеквадратичной ошибки

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, \tau) = \frac{2\sigma_{pr}^2}{\Delta} \frac{1}{\operatorname{th}\{\alpha\Delta(\tau + \tau_1)\} + \operatorname{th}\{\alpha\Delta(\sigma - t_0 + \tau_0)\}} \qquad (\tau > 0), \quad (23)$$

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, \tau) = \sigma_{pr}^2 \left\{ 1 - e^{2\alpha\tau} \left[1 - \frac{2}{1 + \Delta \operatorname{th} \{\alpha \Delta (\tau - t_0 - \tau + \tau_0]} \right] \right\} \quad (\tau < 0), \tag{24}$$

где, согласно (5),

$$\sigma_{pr}^2 = \frac{4\gamma}{\alpha^2}.$$

В выражениях (23, 24) отчетливо прослеживается зависимость средней ошибки фильтрации от длины интервала наблюдения и времени запаздывания (или опережения). В случае полубесконечного интервала ($t_0 \to -\infty$) наблюдения выражения для средней ошибки примут вид

$$\overline{\varepsilon_з^2}(\tau) = \frac{\sigma_{pr}^2}{\Delta} \left[1 + \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1} e^{-2\alpha\Delta\tau} \right] \quad (\tau > 0), \tag{25}$$

$$\overline{\varepsilon_п^2}(\tau) = \sigma_{pr}^2 \left[1 - \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1} e^{2\alpha\tau} \right] \quad (\tau < 0), \tag{26}$$

$$\overline{\varepsilon_ф^2}(0) = \frac{2\sigma_{pr}^2}{\Delta + 1} = \alpha N (\Delta - 1). \tag{27}$$

Для $\tau \to, \infty$ $(T \gg \sigma)$

$$\frac{\overline{\varepsilon_п^2}}{\sigma_{pr}^2} \to \frac{1}{\Delta} < 1,$$

а для $\tau \to -\infty$, $\dfrac{\overline{\varepsilon_п^2}}{\sigma_{pr}^2} \to 1$ $(\sigma \gg T)$.

Графики ошибки фильтрации (25, 27) для случаев сильного ($\alpha N \gg 1$) и слабого ($\alpha N \ll 1$) шума в симметричном ($\mu = \nu$, $\alpha = 2\mu$) и несимметричном ($\mu \neq \nu$) случаях изображены на рис. 1.

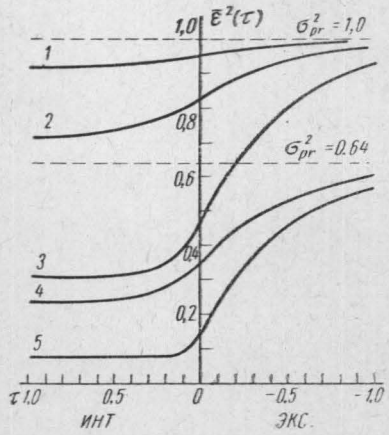


Рис. 1. Средний квадрат ошибки линейной фильтрации симметричного сигнала ($\mu = \nu$, $\mu + \nu = 1$): *1* — $\alpha N = 5{,}523$, *2* — $\alpha N = 2$, *3* — $\alpha N = 0{,}2$ и несимметричного сигнала ($\mu + \nu = 1$; $\mu = 0{,}8$; $\nu = 0{,}2$), *4* — $\alpha N = 2$, *5* — $\alpha N = 0{,}2$

§ 3. Синтез фильтра Винера и оценка качества фильтрации

Рассмотрим линейный фильтр с весовой функцией $k(t)$, на вход которого поступает случайный процесс

$$y(t) = \eta(t) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — белый шум со спектральной плотностью $S_{\xi\xi}(\omega) = N$, а сигнал $\eta(t)$ определяется корреляционными функциями (5).

Желаемой величиной выходного сигнала является значение сигнала $\eta(\sigma)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{T} k(T - t') y(t') dt' \simeq \eta(\sigma). \tag{28}$$

Для определения оптимальной весовой функции $k(t)$, соответствующей минимуму среднеквадратичной ошибки, воспользуемся аппаратом, развитым в работе Винера [2]. При этом необходимые и достаточные априорные сведения содержатся в корреляционных функциях (5). Для физически осуществимого фильтра с

$$k(t) = \begin{cases} k(t); & t > 0 \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases}$$

оптимальное выражение весовой функции определяется из уравнения Винера—Хопфа

$$K_{\eta y}(s-\tau) = \int_0^\infty k(t') K_{yy}(s-t')\, dt', \tag{29}$$

справедливого в области $s \geqslant 0$. Очевидно, что на значение $k(t)$ поведения функции $K_{\eta y}(s-\tau)$ оказывает влияние лишь при $s \geqslant 0$. Поэтому, если ввести функцию $f(s) = K_{\eta y}(s-\tau)$ при $s \geqslant 0$ и произвольно определенную вне этой области, то уравнение (29) можно переписать в виде:

$$f(s) = \int_0^\infty k(t') K_{yy}(s-t')\, dt' \quad (s \geqslant 0). \tag{30}$$

Решение уравнения (30), как известно [15], имеет вид

$$k(i\omega) = \frac{1}{\psi(i\omega)} \left[\frac{S(\omega)}{\psi(-i\omega)} \right]_+. \tag{31}$$

Здесь

$$\psi(i\omega)\psi(-i\omega) = S_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{yy}(t) e^{-i\omega t}\, dt,$$

т. е. в данном случае вследствие (5):

$$\psi(i\omega)\psi(-i\omega) = N \frac{\omega^2+\lambda^2}{\omega^2+\alpha^2}; \quad \lambda = \alpha\Delta = \alpha\sqrt{1+\frac{8\gamma}{\alpha^3 N}}.$$

Разложение этого выражения на множители производится таким образом, чтобы функция $\Psi(i\omega)$ не имела полюсов в правой полуплоскости (была изображением Лапласа некоторой функции). В нашем случае

$$\psi(p) = \sqrt{N}\, \frac{p+\lambda}{p+\alpha}.$$

Функция $S(\omega)$ в (31) определяется как

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s}\, ds,$$

где, как уже указывалось, интеграл по области $s<0$ не оказывает влияния на результат, так что $f(s)$ на эту область может быть доопределена по произволу. Учитывая (5) и выбирая один из возможных способов доопределения, имеем

$$S(\omega) = \frac{8\gamma}{\alpha} \frac{1}{\omega^2+\alpha^2} e^{-i\omega\tau}.$$

Следовательно, формула (31) дает для передаточной функции фильтра выражение

$$k(i\omega) = \frac{8\gamma}{\alpha N} \cdot \frac{i\omega + \alpha}{i\omega + \lambda} \left[\frac{(-i\omega + \alpha) e^{-i\omega\tau}}{(-i\omega + \lambda)(\omega^2 + \alpha^2)} \right]_+ . \tag{32}$$

Скобки $[\ ]_+$ в выражениях (31, 32) означают отсутствие полюсов в правой полуплоскости. Для строгого вычисления (32) нужно использовать формулу

$$[\gamma(i\omega)]_+ = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^\infty \gamma(iu) e^{iut} du. \tag{33}$$

Применяя формулу (33) к вычислению (32), получим

$$k(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{8\gamma}{\alpha N} \frac{\alpha + i\omega}{\lambda + i\omega} \int_0^\infty e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(t-\tau)}}{(\lambda - iu)(\alpha + iu)} du.$$

В случае фильтрации с запаздыванием ($\tau > 0$) это выражение разбивается на два:

$$k(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{8\gamma}{\alpha N} \frac{\alpha + i\omega}{\lambda + i\omega} \left\{ \int_0^\tau e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iu(\tau - t)} du}{(\lambda - iu)(\alpha + iu)} + \right.$$

$$\left. + \int_\tau^\infty e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(t-\tau)} du}{(\lambda - iu)(\alpha + iu)} \right\}.$$

К подынтегральным выражениям применяем лемму Жордана, замыкая контуры дугами бесконечно большого радиуса в верхней и нижней полуплоскостях соответственно и беря вычеты в точках $u = i\alpha$ и $u = -i\lambda$. В результате получаем

$$k(i\omega) = \frac{8\gamma}{\alpha N} \frac{\alpha + i\omega}{\lambda + i\omega} \left\{ \int_0^\tau e^{-i\omega t} \frac{e^{-\lambda(\tau - t)} dt}{\lambda + \alpha} + \int_\tau^\infty e^{-i\omega t} \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{\lambda + \alpha} dt \right\} =$$

$$= \frac{8\gamma}{\alpha(\lambda + \alpha) N} \frac{\alpha + i\omega}{\lambda + i\omega} \left\{ e^{-\lambda\tau} \frac{1 - e^{(\lambda - i\omega)\tau}}{\lambda - i\omega} + e^{\alpha\tau} \frac{e^{-(\alpha + i\omega)\tau}}{\alpha + i\omega} \right\} =$$

$$= \frac{8\gamma}{\alpha N} \left\{ \frac{e^{-i\omega\tau}}{\lambda^2 + \omega^2} - \frac{e^{-\lambda\tau}(\alpha + i\omega)}{(\lambda + \alpha)(\lambda^2 + \omega^2)} \right\}. \tag{34}$$

Аналогичные вычисления приводят в случае прогнозирующего фильтра ($\tau < 0$) к выражению

$$k(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{8\gamma}{\alpha N} \frac{\alpha + i\omega}{\lambda + i\omega} \int_0^\infty e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(t-\tau)}}{(\lambda - iu)(\alpha + iu)} du = \frac{8\gamma}{\alpha(\lambda + \alpha) N} \frac{e^{\alpha\tau}}{\lambda + i\omega}. \tag{35}$$

Из полученных выражений для оптимальных передаточных функций следует, что в случае запаздывания передаточная функция не является рациональной.

Минимальная среднеквадратичная ошибка фильтрации для исследуемых линейных фильтров будет определяться хорошо известным выражением

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_{\eta\eta}(\omega) - |k(i\omega)|^2 S_{yy}(\omega)\} d\omega. \tag{36}$$

Подставляя в эту формулу найденные значения оптимальных передаточных функций (34—35), получаем

для фильтра с запаздыванием ($\sigma < T$)

$$\overline{\varepsilon_3^2}(\tau) = \frac{\sigma_{pr}^2}{\Delta} \left\{1 + \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1} e^{-2\alpha\Delta\tau}\right\}, \tag{37}$$

для прогнозирующего фильтра ($\sigma > T$)

$$\varepsilon_{\text{п}}^2(\tau) = \sigma_{pr}^2 \left\{1 - \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1} e^{2\alpha\tau}\right\}, \tag{38}$$

по-прежнему

$$\Delta = \sqrt{1 + \frac{8\gamma}{\alpha^3 N}}; \quad \sigma_{pr}^2 = \frac{4\gamma}{\alpha^2}.$$

Полученные выражения (37, 38) совпадают с аналогичными результатами для линейного фильтра, рассчитанного методом условных марковских процессов. В следующей статье эти выражения будут сравниваться с соответствующими результатами для нелинейных фильтров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. «Изв. АН СССР», сер. матем., № 5, 1941.
2. Винер Н. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. John Wiley, 1949.
3. Ньютон Дж., Гулд А., Кайзер Дж. Теория линейных следящих систем. М., Физматгиз, 1961.
4. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов. М., «Мир», 1965.
5. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М., ИЛ, 1960.
6. Вайнштейн А. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Советское радио», 1960.
7. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
8. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 2. М., «Советское радио», 1962.
9. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, 1966.
10. Стратонович Р. Л. «Изв. вузов», радиофизика, **2**, № 6, 892—901, 1959.
11. Стратонович Р. Л. «Радиотехника и электроника», **5**, № 11, 1751—1763, 1960.
12. Стратонович Р. Л. «Автоматика и телемеханика», **22**, № 9, 1163—1174, 1961.
13. Kalman R. E., Bucy R. S. «Trans. ASME», **83**, 95—108, 1961.
14. Kalman R. E., Englar T. S., Bucy R. S. Fundamental Study of Adaptive Control Systems, ASD-TR-61-27; 1, April, 1962.
15. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
22.12 1967 г.

Кафедра
общей физики для мехмата