Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1968

УДК 62—504—4

А. М. ГРИГОРЬЕВ, К. Ф. ТЕОДОРЧИК

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ САУ

Развит метод построения траекторий корней замкнутых импульсных систем на плоскости s. Этот метод позволяет выяснить механизм возникновения в импульсных системах добавочных предельных точек, а также показать, что любая импульсная система, независимо от порядка исходной непрерывной системы, асимптотически не выше второго порядка.

Рассмотрим простейший вид линейной импульсной системы без запаздывания, представленный на рис. 1 [1]. На систему действует непрерывный входной сигнал $e(t)$, изображение которого по Лапласу $E(s)$. После квантования с периодом T входной сигнал преобразуется в последовательность импульсов $e^*(t)$ с изображением $E^*(s)$. Квантованный сигнал $e^*(t)$ далее воздействует на непрерывную линейную часть системы с передаточной функцией

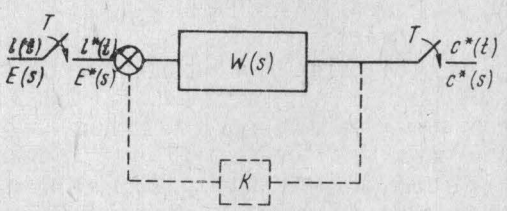

Рис. 1

$$W(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, \tag{1}$$

где A и B — полиномы от s. Выходом системы является сигнал $c^*(t)$, квантованный синхронно с входным сигналом и имеющий изображение $C^*(s)$. Передаточная функция такой системы определяется как отношение

$$W^*(s) = \frac{C^*(s)}{E^*(s)}. \tag{2}$$

Как известно [2], между передаточной функцией непрерывной части $W(s)$ и импульсной передаточной функцией $W^*(s)$ имеет место соотношение

$$W^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + nj\omega_k) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A(s + nj\omega_k)}{B(s + nj\omega_k)}, \qquad (3)$$

где $\omega_k = \frac{2\pi}{T}$.

Из (3) и (1) следует, что $W^*(s)$ имеет в плоскости s все полюса непрерывной части $W(s)$, размноженные в виде бесконечных вертикальных колонок с периодом $j\omega_k$, а также нули, аналогично размноженные по вертикали с тем же периодом, но не совпадающие по числу и положению с нулями $W(s)$.

Если систему на рис. 1 замкнуть обратной связью на усилитель с действительным коэффициентом усиления K (см. пунктир на рис. 1), то передаточная функция такой импульсной замкнутой системы $G^*(s)$ будет выражаться через передаточную функцию импульсной разомкнутой цепи $W^*(s)$ так же, как и в случае непрерывной системы, т. е.

$$G^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + KW^*(s)}. \qquad (4)$$

В данной работе дается анализ поведения замкнутых импульсных САУ в зависимости от изменения свободного параметра K в пределах $-\infty < K < \infty$. Этот анализ проводится методом построения траекторий корней таких систем непосредственно в плоскости комплексного переменного s. При этом мы будем опираться только на соотношения (3) и (4) и геометрические свойства траекторий корней [3].

Приравнивая нулю знаменатель передаточной функции $G^*(s)$ (4) и учитывая (3), получим характеристическое уравнение замкнутой импульсной САУ в виде

$$T \prod_{n=-\infty}^{\infty} B(s + nj\omega_k) + K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(s + nj\omega_k) \prod_{l \neq n} B(s + lj\omega_k) = 0. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что как начальные, так и предельные точки замкнутой импульсной системы, так же как полюса и нули разомкнутой системы, размножены по направлению мнимой оси с периодом $j\omega_k$, т. е. количество этих основных точек равно бесконечности. Следовательно, количество ветвей траектории в s-плоскости также бесконечно. При этом среди начальных точек траекторий существуют все начальные точки исходной непрерывной системы, соответствующие $n = 0$.

Ввиду того что передаточная функция $G^*(s)$ также подчиняется соотношению (3), картина траекторий корней будет периодична по s с периодом $j\omega_k$. В силу периодичности картины траекторий поведение системы однозначно определяется полосой плоскости s, ограниченной двумя прямыми, параллельными действительной оси и имеющей ширину $\omega_k = \frac{2\pi}{T}$. Для определенности в качестве первой полосы периодичности выберем полосу, лежащую между действительной осью и прямой $\omega = \omega_k$.

Из (5) следует, что в импульсных системах число начальных точек в каждой полосе периодичности равно общему числу начальных точек в соответствующей непрерывной системе.

Определим возможные асимптоты траекторий. Действительная ось всегда является геометрическим местом корней и одновременно одной из асимптот. Тогда в силу периодичности расположения полюсов и нулей импульсной системы по направлению мнимой оси все границы по-

лос периодичности также будут асимптотами и геометрическими местами корней.

Прямые, проходящие по середине любой полосы периодичности, также могут быть асимптотами, но эти асимптоты одновременно должны быть геометрическими местами корней, так как в противном случае требования симметрии траекторий относительно действительной оси и периодичности с периодом $j\omega_k$ становятся несовместимыми. На рис. 2 и 3 представлены траектории корней простейших импульсных систем, ко-

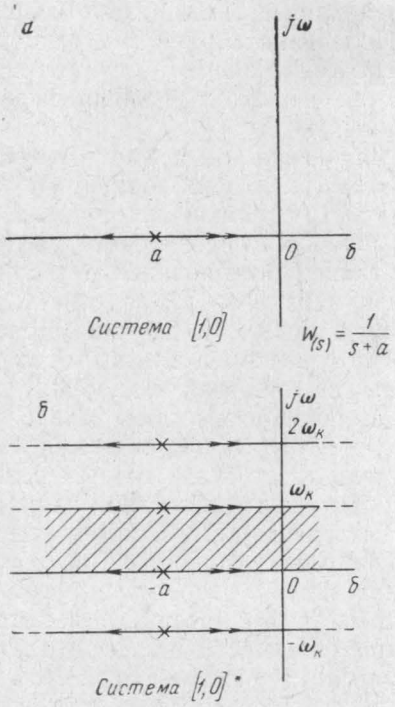

Рис. 2

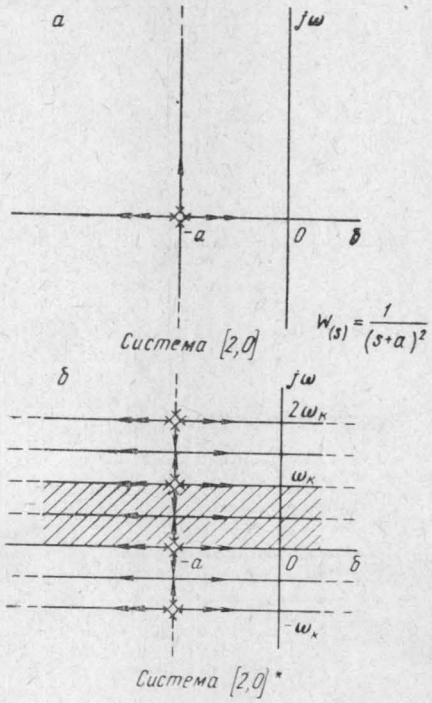

Рис. 3

торые в непрерывном режиме являются системами класса [1, 0] и [2, 0] соответственно. На каждом рисунке первая полоса периодичности заштрихована. Там же для сравнения представлены траектории этих систем в непрерывном режиме.

Других асимптот в каждой полосе периодичности быть не может, так как это приводило бы к противоречию между требованиями периодичности с периодом $j\omega_k$ и симметрии траекторий относительно действительной оси. Но если в каждой полосе периодичности могут быть только две асимптоты, то это значит, что для каждого знака параметра K в пределах каждой полосы не более двух ветвей траектории могут уходить в бесконечность. Остальные ветви должны заканчиваться на предельных точках. Отсюда следует, что если исходная непрерывная система имела n начальных и m предельных точек (система класса $[n, m]$) и была асимптотически порядка $\mu = n - m$, причем μ — любое целое число, то соответствующая импульсная система будет иметь в каждой полосе периодичности n начальных и m' предельных точек (система класса $[n, m']$*), причем $n - m' = \mu' \leqslant 2$[1]. Это означает, что любая

[1] Под асимптотическим порядком импульсной системы мы понимаем разность между числом начальных и предельных точек в каждой полосе периодичности.

импульсная система асимптотически ведет себя как система не выше второго порядка, независимо от порядка непрерывной части. Отсюда следует, что при переходе к импульсным системам от непрерывных, асимптотический порядок которых больше двух, в каждой полосе периодичности появляется $m'-m$ дополнительных предельных точек (см. рис. 4).

Траектории корней таких систем вне некоторых конечных областей каждой полосы, которые мы назовем областями сложной формы траекторий, совпадают с траекториями корней для системы второго порядка. Поведение корней внутри области сложной формы определяется свойствами исходной непрерывной системы.

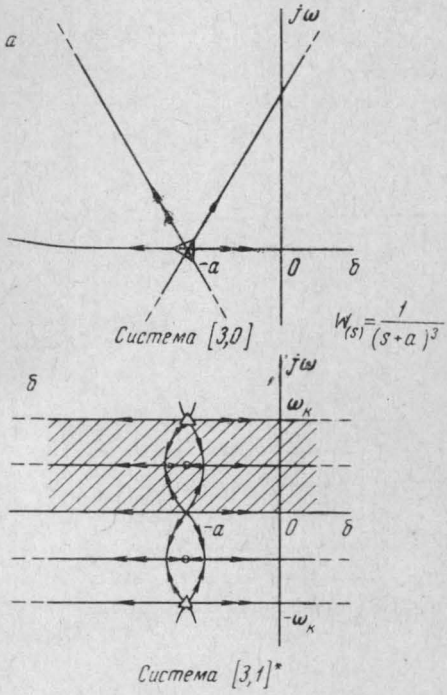

Рис. 4

Используя асимптотические свойства траекторий корней импульсных систем, полученные выше, и учитывая общие свойства траекторий, такие, как поведение корней вблизи начальных, предельных и кратных точек и т. д., мы можем строить траектории для импульсных систем, не прибегая к дополнительным вычислениям и зная только исходную непрерывную систему. При этом результат будет точным везде, за исключением областей сложной формы траекторий. Пример подобного построения приведен на рис. 4.

На рис. 4,*а* изображены траектории системы класса [3,0] в непрерывном режиме. При переходе к импульсному режиму (рис. 4,*б*) в каждой полосе периодичности появляется одна дополнительная предельная точка, т. е. система становится системой класса [3,1]*.

Если мы выберем знак параметра K и будем непрерывно изменять этот параметр, то при некотором $K = K^*_{кр}$ одна из колонок полюсов может выйти на мнимую ось. При этом произойдет потеря устойчивости и возбуждение импульсной системы. Очевидно, что в импульсной системе будет одновременно возбуждаться бесконечное множество частот. Рассмотрим низшие частоты, расположенные в первой полосе периодичности. Если мнимая ось лежит вне областей сложной формы траекторий, то для любой системы низшая частота возбуждения равна $\omega_k/2$, если $K > 0$, и ω_k, если $K < 0$ (см. рис. 4). Если же мнимая ось проходит внутри области сложной формы траектории, то низшая частота возбуждения лежит в пределах $0 < \omega'_{кр} \leqslant \omega_k/2$. Кроме того, если $n - m > 2$ для непрерывной части, то в пределах первой полосы одновременно с $\omega'_{кр}$ может возбуждаться частота $\omega''_{кр}$, причем $\omega'_{кр} + \omega''_{кр} = \omega_k$.

Из примеров видно, что для систем, у которых в непрерывном режиме $n-m>1$, в импульсном режиме имеет место чередование четных и нечетных асимптот по вертикали. Для систем, у которых $n-m=1$, такого чередования нет (влево — все нечетные, вправо — четные) (см.

рис. 2 и 3). Отсюда следует, что импульсная система с отрицательной обратной связью ($K>0$) может быть абсолютно устойчивой (устойчивой при $0<K<\infty$) только тогда, когда ее непрерывная часть асимптотически не выше первого порядка. Интересно отметить, что непрерывная система может быть абсолютно устойчивой, когда она асимптотически не выше второго порядка [3].

Можно привести основные результаты, полученные для замкнутых линейных импульсных САУ при $-\infty<K<\infty$.

1. Импульсные САУ любого порядка асимптотически ведут себя как системы не выше второго порядка.

2. Вне областей сложной формы траекторий корни импульсных замкнутых САУ двигаются строго по асимптотам, которые представляют собой прямые, параллельные действительной оси и расположенные от нее на расстоянии кратном $\omega_k/2$.

3. Если мнимая ось s-плоскости лежит вне области сложной формы траекторий, то низшая частота возбуждения будет равна $\frac{\omega_k}{2}=\frac{\pi}{T}$ для $k>0$ и $\omega_k=\frac{2\pi}{T}$ для $k<0$, где T — период квантования.

4. Если мнимая ось проходит внутри области сложной формы траекторий, то низшая частота возбуждения лежит в пределах $0<\omega'_{кр}\leqslant\frac{\omega_k}{2}$. При этом в первой полосе периодичности могут возбуждаться две частоты: $\omega'_{кр}$, и $\omega''_{кр}$, причем $\omega'_{кр}+\omega''_{кр}=\omega_k$.

5. Абсолютно устойчивой может быть только такая импульсная система, асимптотический порядок непрерывной части которой не больше единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. М., ГИФМЛ, 1958.
2. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1963.
3. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
19.1 1968 г.

Кафедра
физики колебаний