Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1969

УДК 517.9 : 535.4

А. С. ИЛЬИНСКИЙ, В. В. КРАВЦОВ, А. Г. СВЕШНИКОВ

О РАССЕЯНИИ ВОЛН В ПОЛЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

Задача о рассеянии волн на посторонних включениях в полых направляющих системах сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода по поверхности включения с регулярным ядром, которое выписывается в явном виде через фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в неограниченном пространстве. Доказана единственность решения полученного уравнения. Метод удобен при исследовании локальной структуры поля в системе.

В нашей работе[1] метод интегральных уравнений, применяемый для решения задач дифракции волн различной природы на посторонних включениях, распространен на задачи о рассеянии волн на препятствиях в направляющих системах. Краевая задача для поля в направляющей системе (волноводном трансформаторе) сведена к интегральному уравнению первого рода по поверхности рассеивающего тела. Ядра полученных интегральных уравнений содержат функцию Грина соответствующей краевой задачи для свободного (пустого) волноводного трансформатора. Построение функции Грина является самостоятельной задачей. Особенно удобны полученные уравнения, например, для исследования рассеяния волн на металлических препятствиях в регулярных волноводах, поскольку в этом случае известно явное аналитическое представление для соответствующей функции Грина. В большинстве же случаев для построения ядра уравнения надо применять численные методы. Поэтому естественно поставить вопрос о сведении задачи о рассеянии волн в направляющей системе к интегральному уравнению, ядро которого не содержит функции Грина. В настоящей работе этот вопрос решен. Метод применим для волн различной природы. Для простоты рассмотрен скалярный (акустический) случай.

Рассмотрим задачу о рассеянии волн в волноводном трансформаторе, состоящем из полости D_0, ограниченной поверхностью S_0 и подсоединенных к этой полости нескольких регулярных волноводов (см. рис.). Будем через σ_ν ($\nu=1, 2, ..., p$) обозначать боковую поверхность волноводов, а через S_ν — их поперечное сечение. Пусть внутри волноводного трансформатора расположено тело D, ограниченное поверхностью S. Будем считать, что поверхность S обладает достаточно боль-

[1] А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. Интегральные уравнения первого рода в задачах о рассеянии волн в полых направляющих системах. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 1968.

шой проводимостью, так что на ней выполняются импедансные граничные условия (в скалярном случае — граничные условия третьего рода).

Пусть внутри волноводного трансформатора имеются распределенные источники, плотность которых определяется локальной функцией $f(M)$ ($f(M) \equiv 0$ вне области V), и кроме этого рассматриваемая система возбуждается собственной волной номера m_0 ν_0-того волновода. Тогда определение поля $u(M)$ в волноводном трансформаторе сводится к нахождению функции $u(M)$, удовлетворяющей в области $D_0 - D$ уравнению Гельмгольца

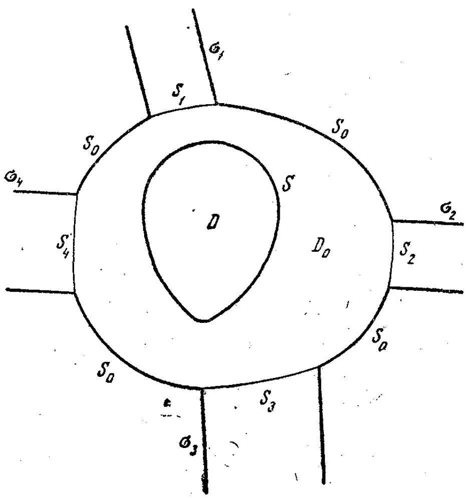

Рис. 1

$$\Delta u + k^2 u = -f(M), \tag{1}$$

граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h_0(p)\, u\,|_{S_0} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h_1(p)\, u\,|_{S} = 0, \tag{2}$$

$$N[u]\,|_{\sigma\nu} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

(оператор N равен единице для первой краевой задачи, и $\frac{\partial}{\partial n}$ — для второй) и парциальным условиям излучения в произвольных сечениях S_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, p$) регулярных волноводов

$$\int\limits_{S_\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + i\gamma_m^\nu u \right) \varphi_m^\nu(p)\, ds_p = 2i\gamma_{m_0}^{\nu_0} A e^{i\gamma_{m_0}^{\nu_0} z} \Big|_{S_{\nu_0}} \delta_{mm_0} \delta_{\nu\nu_0},$$

$$(m = 1, 2, \ldots, \quad \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{3}$$

где $\varphi_m^\nu(p)$ — мембранная функция регулярного волновода, удовлетворяющая соответствующим граничным условиям, γ_m^ν — постоянная распространения m-ой волны в ν-ом волноводе, $Im\gamma_{m_0}^{\nu_0} = 0$.

Сведем краевую задачу (1) — (3) к интегральному уравнению первого рода. Обозначим через σ_ν' части поверхностей волноводов, лежащие между сечением S_ν и полостью S_0. Пусть D — область, ограниченная поверхностями S и $S' = S_0 + \sum\limits_\nu \sigma_\nu' + \sum\limits_\nu S_\nu$. Применим формулу Грина в области D к функциям $u(p)$ и $\psi(M, p) = \frac{1}{R_{MP}} \exp\{ikR_{MP}\}$, считая, что точка M лежит в области D_1 или вне поверхности S':

$$\int\limits_{S'} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(p)\, \psi(M, p) - u(p) \frac{\partial \psi}{\partial n_p}(M, p) \right\} dS_p = F(M),$$

$$M \notin D, \tag{4}$$

где

$$F(M) = -2i\gamma_{m_0}^{\nu_0} A e^{i\gamma_{m_0}^{\nu_0} z}\Big|_{S_{\nu_0}} \psi_{m_0}^{\nu_0}(M) - \int\limits_V \psi(M, P) f(p)\, d\tau_p,$$

$$\psi_{m_0}^{\nu_0}(M) = \int\limits_{S_{\nu_0}} \psi(M, P)\, \varphi_{m_0}^{\nu_0}(p)\, dS_p.$$

Используя граничные условия (2), перепишем (4) в виде:

$$\int\limits_{S_0} \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P) + h_0(p)\, \psi(M, P) \right\} u(p)\, dS_p +$$

$$+ \int\limits_S \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P) + h_1(P)\, \psi(M, P) \right\} u(p)\, dS_p -$$

$$- \int\limits_{\sum\limits_\nu S_\nu} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(p)\, \psi(M, P) - u(p) \frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M. P) \right\} dS_p +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\displaystyle\int\limits_{\sum\limits_\nu \sigma'_\nu} \frac{\partial u}{\partial n}(p)\, \psi(M, P)\, dS_p \text{ для задачи Дирихле} \\ \displaystyle\int\limits_{\sum\limits_\nu \sigma'_\nu} u(p) \frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P)\, dS_p \text{ для задачи Неймана} \end{array} \right\} =$$

$$= -F(M), \quad (M \notin D). \tag{5}$$

Уравнение (5) вместе с парциальными условиями излучения

$$\int\limits_{S_\nu} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} + i\gamma_m^\nu u \right\} \varphi_m^\nu(p)\, dS_p = 2i\gamma_{m_0}^{\nu_0} A e^{i\gamma_{m_0}^{\nu_0} z}\Big|_{S_{\nu_0}} \delta_{mm_0} \delta_{\nu\nu_0},$$

$$(m = 1, 2, \ldots\ , \quad \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{6}$$

образуют полную систему уравнений для определения $u|_{S_0+S}$, $u\Big|_{\sum\limits_\nu \sigma'_\nu}$, или $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sum\limits_\nu \sigma'_\nu}$, $u|_{S_\nu}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_\nu}$. Существование решения системы (5)—(6) вытекает из существования решения краевой задачи (1) — (3).

Покажем, что непрерывное решение системы (5) — (6) единственно. Для определенности рассмотрим вторую краевую задачу. Пусть однородная система

$$\int\limits_{S_0} \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P) + h_0(P)\, \psi(M, P) \right\} u(p)\, dS_p +$$

$$+ \int\limits_S \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P) + h_1(P)\, \psi(M, P) \right\} u(p)\, dS_p -$$

$$-\int\limits_{\sum\limits_{\nu} S_\nu} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(p)\,\psi(M, P) - u(P)\frac{\partial \psi}{\partial n_p}(M, P) \right\} dS_p +$$

$$+\int\limits_{\sum\limits_{\nu} \sigma'_\nu} u(p)\frac{\partial \varphi}{\partial n_p}(M, P)\,dS_p = 0, \quad (M \notin D), \tag{7}$$

$$\int\limits_{S_\nu} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} + i j_m^\nu u \right\} \varphi_m^\nu(p)\,dS_p = 0 \tag{7'}$$

имеет нетривиальное решение, которое для удобства обозначим следующим образом:

$$u\big|_{S_0+S+\sum\limits_\nu S_\nu+\sum\limits_\nu \sigma'_\nu} = \mu(P) \not\equiv 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\sum\limits_\nu S_\nu} = \nu(p) \not\equiv 0.$$

Построим функцию

$$V(M) = \int\limits_{S_0} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n_p}(M, P) + h_0(p)\,\psi(M, P) \right\} \mu(p)\,dS_p +$$

$$+\int\limits_{S} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n_p}(M, P) + h_1(p)\,\psi(M, P) \right\} \mu(p)\,dS_p -$$

$$-\int\limits_{\sum\limits_\nu S_\nu} \left\{ \nu(P)\,\psi(M, P) - \mu(P)\frac{\partial \psi}{\partial n_p}(M, P) \right\} dS_p +$$

$$+\int\limits_{\sum\limits_\nu \sigma'_\nu} \mu(P)\frac{\partial \psi}{\partial n_p}(M, P)\,dS_p.$$

Эта функция определена во всем пространстве. Если $M \notin D$, то $V(M) \equiv 0$ в силу (7'). В области D $\Delta V + k^2 V = 0$. На поверхностях выполняются следующие граничные условия:

$$\frac{\partial V}{\partial n} + h_0 V\bigg|_{S_0} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} + h_1 V\bigg|_{S} = 0,$$

$$N[V]\big|_{\sigma'_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p).$$

В произвольных сечениях S_V удовлетворяются парциальные условия излучения, поскольку $\mu(p)$ и $\nu(p)$ связаны соотношением (7'). В силу единственности решения краевой задачи (1)—(3) $V(M) \equiv 0$ в D. Используя разрывные свойства волновых потенциалов, находим, что $\mu(p) \equiv 0$ и $\nu(p) \equiv 0$ в точках непрерывности. Следовательно, система (7) имеет только тривиальное решение, а решение системы (5)—(6) единственно. Тем самым показана эквивалентность системы (5)—(6) и краевой задачи (1)—(3).

Несколько преобразуем систему (5) — (6). Разложим функции

$$\psi(M, P)\,|_{p \in S_\nu} \text{ и } \frac{\partial \psi}{\partial n_p}(M, P)\,|_{p \in S_\nu}$$

в сечении S_ν в ряды по мембранным функциям $\varphi_m^\nu(p)$ этого сечения

$$\psi(M, P)|_{p\in S_\nu} = \sum_j \psi_j^{(\nu)}(M)\,\varphi_j^\nu(p),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P)\Big|_{p\in S_\nu} = \sum_j \left(\frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M)\right)_j^{(\nu)} \varphi_j^\nu(p).$$

Подставляя эти разложения в (5) и учитывая парциальные условия излучения (6), получим

$$\int_{S_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P) + h_0(p)\,\psi(M, P)\right\} u(p)\,dS_p +$$

$$+\int_S \left\{\frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P) + h_1(p)\,\psi(M, P)\right\} u(p)\,dS_p +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{p}\sum_j \left[i\gamma_j^\nu\psi_j^{(\nu)}(M) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M)\right)_j^{(\nu)}\right] u_j^{(\nu)} - 2i\gamma_{m_0}^{\nu_0} A e^{i\gamma_{m_0}^{\nu_0} z}\Big|_{S_{\nu_0}} \psi_{m_0}^{\nu_0}(M) +$$

$$+\left\{\begin{matrix} -\displaystyle\int_{\sum_\nu \sigma_\nu'} \frac{\partial u}{\partial n}(p)\,\psi(M, P)\,dS_p \text{ для задачи Дирихле} \\ \displaystyle\int_{\sum_\nu \sigma_\nu'} u(p)\,\frac{\partial\psi}{\partial n_p}(M, P)\,dS_p \text{ для задачи Неймана} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -F(M), \qquad (M \notin D), \tag{8}$$

где $u_j^{(\nu)}$ есть коэффициенты разложения полного поля $u(p)$ в сечении S_ν по мембранным функциям

$$u(p)|_{S_\nu} = \sum_j u_j^{(\nu)}\varphi_j^\nu(p).$$

Уравнение (8) позволяет определить $u|_{S_0+S}$, $u_j^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma_\nu'}$ или $u|_{\sigma_\nu'}$. Можно показать, что уравнение (8) вместе с парциальными условиями излучения эквивалентно системе (5) — (6).

Решив систему (5) — (6) или уравнение (8), найдем $u|_{S_0+S}$, $u_j^{(\nu)}$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma_\nu'}$ или $u(p)|_{\sigma_\nu'}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$. После этого поле в области D вычисляется квадратурами по формуле Грина, а поля внутри волноводов σ_ν определяются соотношениями

$$u(M) = \int_{S_\nu} u(p)\,\frac{\partial G_b^{(\nu)}}{\partial n_p}(M, P)\,dS_p,$$

где $G_b^{(\nu)}(M, P)$ — функция Грина регулярного ν-того волновода, удовлетворяющая граничным условиям

$$G_b^{(\nu)}(M, P)|_{p\in S_\nu} = 0,$$

$$N\,[G_b^{(\nu)}(M, P)]|_{p\in\sigma_\nu} = 0.$$

Поле внутри каждого волновода можно также представить в виде ряда по собственным волнам этого волновода, поскольку известны коэффициенты разложения $u_j^{(\nu)}$ полного поля в сечении S_ν по мембранным функциям.

Таким образом, поставленная задача о рассеянии волн в описанной системе сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для решения интегрального уравнения можно применять метод регуляризации А. Н. Тихонова.

Интегральное уравнение (8) оставляет некоторую свободу при выборе поверхностей σ_ν' (или, иначе говоря, положение сечения S_ν).

Это обстоятельство можно использовать следующим образом. Известно, что нераспространяющиеся волноводные волны имеют экспоненциальное затухание. Поэтому величину σ_ν' следует выбрать так, чтобы все нераспространяющиеся волны успели затухнуть, и в сечении S_ν можно было ограничиться небольшим числом коэффициентов $u_j^{(\nu)}$. Заметим, кроме того, что устойчивость численного решения системы (8) повышается при равномерном распределении точек M как внутри тела D, так и внутри всех волноводов. При этом выгодно выбирать положение точек M достаточно близко к поверхностям S и S_ν ($\nu=1, 2, \ldots, p$).

Указанный метод решения задачи рассеяния волн в направляющей системе непосредственно обобщается на случай диэлектрических и неоднородных препятствий, а также на электромагнитный случай.

Поступила в редакцию
26.2 1967 г.

Кафедра
математики