

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1969

УДК 539.12.01

В. Б. ГОСТЕВ, В. С. МИНЕЕВ

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ВЫСШЕМ СЕКТОРЕ МОДЕЛИ ЛИ

Исследовано поведение пропагатора $V\theta$ связанного состояния в модели Ли. Показано, что в случае сильной связи одновременно возникают единственное связанное состояние и резонанс в упругом $V\theta$ -рассеянии. Указаны и другие особенности $V\theta$ -рассеяния.

Модель Ли рассматривалась многими авторами в основном в смысле ее теоретико-полевой интерпретации, определения масс физических частиц и перенормировки заряда. В ряде работ это рассмотрение ограничивалось областью стабильных V -частиц (см., например, [1], [2]). Работы [3], [4], [5], посвященные рассмотрению нестабильных частиц, затрагивали главным образом общетеоретические вопросы введения и интерпретации нестабильных состояний, определения их масс и времени жизни. Во всех этих работах рассматривался только $N\theta$ -сектор модели и негласно считалось, что может существовать либо одно связанное состояние, либо один резонанс в $N\theta$ -рассеянии (см., например, [6]). В первом случае это состояние идентифицировалось со стабильной V -частицей, во втором резонанс интерпретировался как нестабильная физическая V -частица. Однако в статье [7] было выяснено, что в $N\theta$ -секторе при использовании традиционных формфакторов могут существовать одновременно и стабильные, и резонансные состояния. В соответствии с поведением этих состояний в зависимости от константы связи и неперенормированной массы $mV^{(0)}$ была произведена их интерпретация в качестве физических стабильных и нестабильных V -частиц и связанных $N\theta$ -состояний (последних — как сложных систем).

В настоящей работе проводится аналогичного типа исследование возможных состояний в $V\theta$ -секторе модели Ли, точные решения для которого были получены сравнительно недавно [8], [9] и [10]. Выясняется ряд нетривиальных особенностей, возникающих в $V\theta$ -секторе: одновременное появление при некоторой величине константы связи g и стабильного, и нестабильного состояния при изменении g и некоторые другие особенности, не имеющие места в случае обычного потенциального рассеяния и в $N\theta$ -секторе модели Ли.

Гамильтониан модели Ли записывается следующим образом:

$$H = H_0 + H_1,$$

$$H_0 = m_V \psi_V^\dagger \psi_V + \delta m \psi_V^\dagger \psi_V + m_N \psi_N^\dagger \psi_N + \int \omega(\vec{q}) a^\dagger(\vec{q}) a(\vec{q}) d^3q,$$

$$H_I = -\frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \psi_V^\dagger \psi_N \int \frac{f(\omega)}{\sqrt{2\omega}} a(\vec{q}) d^3q + \text{э. с.} \right\},$$

где ψ_V (ψ_V^\dagger), ψ_N (ψ_N^\dagger) — неперенормированные фермионные операторы уничтожения (рождения) V - и N -частиц, удовлетворяющие каноническим антикоммутиационным соотношениям; a (a^\dagger) — бозонный оператор уничтожения (рождения) θ -частицы, удовлетворяющий каноническим коммутационным соотношениям; $\omega(q) = \omega = \sqrt{q^2 + \mu^2}$, μ — масса θ -частицы; $g^2 = zg_0^2$ (g — перенормированная константа связи, g_0 — неперенормированная константа связи),

$$z^{-1} = 1 + g^2 \int \frac{f^2(\omega)}{2\omega} \frac{d^3k}{(\omega - b)^2}; \quad (1)$$

(при $\omega < \mu$ функция $[S'_V(\omega)]^{-1}$ действительна). $f(\omega)$ — действительная обрезающая функция, такая, что

$$f(\mu) = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega) = 0, \quad (2)$$

$$f(\omega) \neq 0 \quad \text{при} \quad \omega \geq \mu;$$

$m_V = m_V^{(0)} + \delta m$, $m_V^{(0)}$ — затравочная масса V -частицы,

$$\delta m = -g^2 \int \frac{f^2(\omega)}{2\omega} \frac{d^3k}{\omega - b}.$$

Для исследования $V\theta$ -сектора модели Ли нам будет необходим ряд результатов низшего $N\theta$ -сектора. В этом секторе пропагатор физической V -частицы $S_V'(\omega)$ [11] имеет следующий вид (см., например, [4]):

$$\begin{aligned} [S'_V(\omega)]^{-1} &\equiv \langle 0 | \psi_V \frac{1}{E + i\epsilon - H} \psi_V^\dagger | 0 \rangle = \\ &= (\omega - b) \left[1 + 4\pi g^2 (\omega - b) \int_{\mu}^{\infty} \frac{f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \omega' d\omega'}{(\omega' - b)^2 (\omega' - \omega - i\epsilon)} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $|0\rangle$ — вакуумное состояние, $E = m_N + \omega$ — энергия V -частицы. Матрица $N\theta$ -рассеяния $S \equiv S(\omega)$ связана с пропагатором (3) соотношением

$$S(\omega) = \frac{[S_V'^*(\omega)]^{-1}}{[S_V'(\omega)]^{-1}}. \quad (4)$$

Полюсы S -матрицы дают стабильные состояния при $E < m_N + \mu$, т. е. при $\omega < \mu$ и резонансы при $\omega > \mu$. Энергию этих состояний можно найти из условия

$$\text{Re} [S_V'(\omega)]^{-1} = 0 \quad (5)$$

$b = m_V m_N$. Заметим, кстати, что третье из условий (2) исключает возможность появления ложных полюсов S -матрицы, связанных с фактором $f(\omega)$.

В [7] было подробно исследовано поведение пропагатора V -частицы. Было показано, что $[S_V'(\omega)]^{-1}$ является аналитической функцией

всюду, кроме разреза на действительной оси. Типичное поведение функции

$$h(\omega) \equiv [S'_V(\omega)]^{-1} = (\omega - b) \left[1 + 4\pi g^2 (\omega - b) \int_{\mu}^{\infty} \frac{f^2(\omega') V \sqrt{\omega'^2 - \mu^2} \omega' d\omega'}{(\omega' - b)^2 (\omega' - \omega - i\epsilon)} \right] \quad (3')$$

приведено на рис. 1. В дальнейшем при рассмотрении $V\theta$ -сектора будем считать V -частицу стабильной, т. е. ограничимся $b < \mu$ и для упрощения положим $m_N = 0$. Во избежание появления призрачных состояний ([2]) будем считать $g < g_{кр}$, так что $0 < Z \leq 1$.

Перейдем к $V\theta$ -сектору модели. Пропагатор, описывающий упругое $V\theta$ -рассеяние, имеет вид

$$[S'_{V\theta}(\omega)]^{-1} \equiv \langle 0 | \psi_V a \frac{1}{E + i\epsilon - H} \psi_V^\dagger a^\dagger | 0 \rangle = \left[\frac{1 + h(\omega) A(\omega)}{1 - h(\omega) A(\omega)} \cdot \frac{1}{h(\omega)} \right]^{-1},$$

где $E = m_V + \omega$,

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{h(\omega + b - \omega' + i\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}.$$

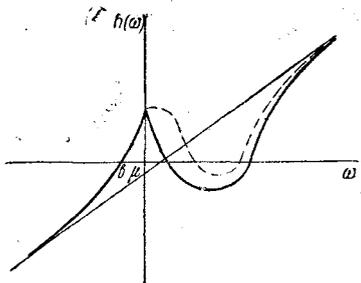


Рис. 1. Типичные кривые функции $h(\omega)$ для различных обрезаний функций

Используя для этого сектора общие соотношения типа (4) — (5), получаем, что резонансы и связанные состояния являются корнями уравнения

$$1 - h(\omega) A(\omega) = 0 \quad (6)$$

для $\omega < \mu$ (связанные состояния) и

$$1 - \operatorname{Re} [h(\omega) A(\omega)] = 0 \quad (7)$$

для $\omega > \mu$ (резонансы в упругом $V\theta$ -рассеянии). $\operatorname{Im}[h(\omega)A(\omega)]$ дает возможность определить ширину резонанса ([4]). Варьируя формфактор, мы можем сделать произведение $\operatorname{Im}h(\omega) \cdot \operatorname{Im}A(\omega)$ в соотношении $\operatorname{Re}[h(\omega)A(\omega)] = \operatorname{Re}h(\omega)\operatorname{Re}A(\omega) - \operatorname{Im}h(\omega)\operatorname{Im}A(\omega)$ весьма малым и приближенно считать корни уравнения (7) совпадающими с корнями уравнения

$$1 - \operatorname{Re}h(\omega)\operatorname{Re}A(\omega) = 0. \quad (8)$$

Поправка не вносит никаких принципиальных изменений.

Рассмотрим подробнее функцию $A(\omega)$. Ее можно записать в виде

$$A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{[\operatorname{Re}h(\omega + b - \omega') + i\operatorname{Im}h(\omega + b - \omega')] |h(\omega')|^2},$$

причем $\operatorname{Im}h(\omega + b - \omega') \neq 0$ только при $\omega + b - \omega' > \mu$, т. е. точка $\omega'_{кр} = \omega + b - \mu$ будет точкой ветвления. Рассмотрим два случая.

1. $\omega'_{кр} < \mu$, т. е. $\omega < 2\mu - b$.

Тогда $\operatorname{Im}h(\omega + b - \omega') \equiv 0$ и имеем

$$\operatorname{Re}A(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{\operatorname{Re}h(\omega + b - \omega')} \frac{\operatorname{Im}h(\omega')}{|h(\omega')|^2}, \quad (9)$$

$$\text{Im}A(\omega) = -\text{Im}\frac{1}{h(\omega)},$$

(P означает интеграл в смысле главного значения).

$$2. \omega'_{\text{кр}} > \mu, \text{ т. е. } \omega > 2\mu - b.$$

Появляется $\text{Im}h(\omega + b - \omega')$ и

$$\text{Re}A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\text{Re}h(\omega + b - \omega')}{|h(\omega + b - \omega')|^2} \cdot \frac{\text{Im}h(\omega')}{|h(\omega')|^2} d\omega', \quad (10)$$

$$\text{Im}A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\omega+b-\mu} \frac{\text{Im}h(\omega + b - \omega')}{|h(\omega + b - \omega')|^2} \cdot \frac{\text{Im}h(\omega')}{|h(\omega')|^2} d\omega'.$$

Таким образом, характеристическая функция

$$G(\omega) = \text{Re}h(\omega) \text{Re}A(\omega) \quad (11)$$

имеет упругий разрез от μ до ∞ и неупругий разрез от точки $2\mu - b$ до ∞ ; вид этой функции дается соотношениями (3'), (9), (10). Отметим ряд свойств функций $h(\omega) \equiv (\omega - b)H(\omega)$ и $A(\omega)$. При $\omega < \mu$ и $h(\omega)$, и $A(\omega)$ действительны. Из формулы (3') видно, что $H(b) = 1$, т. е. $h(b) = 0$ и, следовательно, $G(b) = 0$, а $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} H(\omega) = z$.

Далее, $h(\mu) > 0$, и, следовательно, $A(\mu) > 0$. Так как $h(\omega)$ непрерывна, имеет только один корень при $\omega < \mu$ и монотонно убывает [7], то $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} h(\omega) A(\omega) = c < 0$.

Далее, так как множитель $\text{Im}[h(\omega)]^{-1}$ пропорционален g^2 , можно предполагать, что равенство (8) будет выполнено при некоторых $g < g_{\text{кр}}$. Действительно, при переходе за критическое значение перенормированной константы взаимодействия интеграл в $A(\omega)$ начинает расходиться, так как при этом $h(\omega + b - \omega')$ имеет полюс (призрачное состояние) при $\omega + b - \omega' < 0$, т. е. при $\omega' > \omega + b$, а эта точка всегда попадает в область интегрирования, и, следовательно, можно добиться любого конечного значения для $G(\omega)$ при $0 < g < g_{\text{кр}}$.

Вид функции $G(\omega)$ приводится на рис. 2.

Ясно, что $G(\omega)$ при малом g может быть сколько угодно мала и положительна. При росте g от 0 до некоторой g' , определяемой из условия [12] $z(g') = \frac{1}{2}$ величина $G(\omega)$ растет от 0 до 1. При этом не возникает ни связанных состояний, ни резонансов (слабое взаимодействие). И только начиная с $g > g'$ возникают одновременно и связанное состояние, и резонанс (сильное взаимодействие).

Перечислим характерные черты поведения функции $G(\omega)$: 1) при $\omega < \mu$ монотонно возрастает до первого порога; 2) монотонно убывает при $\mu < \omega < 2\mu - b$ ($b < \mu$), (производная в точке μ испытывает скачок); 3) при $\omega > 2\mu - b$ продолжает монотонно убывать (со скачком производной в точке $\omega = 2\mu - b$), причем скорость убывания сразу после скачка возрастает; 4) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = 0^-$.

Таким образом, монотонное убывание функции $G(\omega)$ до некоторого $\omega_1 > 2\mu - b$ и отрицательная нулевая асимптотика ее при $\omega \rightarrow +\infty$ обеспечивают существование единственного резонанса, появляющегося одновременно с единственным связанным состоянием. Заметим, что

факт одновременного появления и стационарного, и квазистационарного состояния не имеет аналога в случае обычного потенциального рассеяния. Одновременное появление резонанса и связанного состояния наблюдается и в модели с билинейными взаимодействием [13]. Отсюда можно заключить, что такой эффект является множественным, т. е. типичен для взаимодействия с двумя промежуточными частицами (двухмезонное облако вокруг N -частицы). Кроме того, порог $N\theta\theta$ -рождения (неупругий канал при $E > 2\mu - b$) характеризуется своеобразным

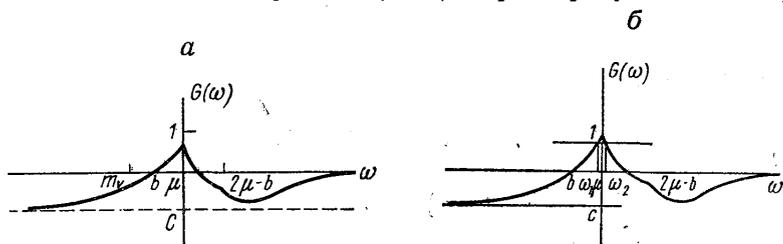


Рис. 2. Вид функции $G(\omega)$: a — слабая связь; $G(\omega) < 1$ — одночастичные состояния отсутствуют; b — сильная связь, энергии ω_1 и ω_2 , при которых $G(\omega) = 1$, соответствуют связанному $V\theta$ -состоянию и резонансу в $V\theta$ -рассеянии

поведением сечения упругого $V\theta$ -рассеяния: нет бесконечного скачка производной, присущего поведению сечения в случае потенциального взаимодействия [14]. Заметим еще, что естественное ограничение $g < g_{кр}$ (ему соответствует вещественность неперенормированной константы связи) является причиной существования нижней границы энергии связанного состояния (сравни с [15], где этот результат был получен из приближенного решения уравнения Шредингера), что не наблюдается в $N\theta$ -секторе модели Ли ([7]), где при изменении константы связи (с теми же ограничениями) энергии связанных состояний и резонансов могут быть любыми ($-\infty < E < \infty$).

Таким образом, пример простой полевой модели позволяет выявить весьма интересные особенности полевого описания нестабильного состояния, не имеющие аналога в потенциальном рассеянии и низшем секторе модели Ли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee T. D. Phys. Rev., 95, 1329, 1954.
2. Källén G., Pauli W., Dan. Mat. Fys. Medd., 30, No. 7, 1955; (перевод «Успехи физич. наук», 60, 425, 1956).
3. Glaser V., Källén G. Nucl. Phys., 2, 706, 1956/57.
4. Araki H., Munakata Y., Kawaguchi M., Goto T. Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 17, 419, 1957.
5. Lévy M. Nuovo Cimento, 13, 115, 1959; 14, 612, 1959.
6. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963.
7. Fonda L., Ghirardi G., Rimini A. Phys. Rev., 133, B196, 1964.
8. Amado R. D. Phys. Rev., 122, 696, 1961.
9. Srivastava R. K. Phys. Rev., 131, 461, 1963.
10. Pagnamenta A. Journ. Math. Phys., 6, 955, 1965.
11. Lehmann H. Nuovo Cimento, 11, 342, 1954.
12. Chew H. Phys. Rev., 132, 2756, 1963.
13. Хенли Э., Тирринг В. Элементарная квантовая теория поля, гл. 12. М., ИЛ, 1963.
14. Breit G. Phys. Rev., 107, 1612, 1957.
15. Гостев В. Б. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астроном., № 1,1, 1967.