Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1969

УДК 62—501.15

А. М. ГРИГОРЬЕВ, Ю. В. ЛИСАКОВ

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Дается разработка применения метода траекторий корней для исследования чувствительности к изменениям параметра.

Введение

В теории и практике автоматического управления исследование влияния малых изменений параметров САУ на ее свойства имеет большое значение. Подобными исследованиями занимается теория чувствительности, которая к настоящему времени сложилась как самостоятельная область теории автоматического управления [1].

В данной работе в исследовании чувствительности корней характеристического уравнения использован математический аппарат метода траекторий корней [2]. В статье вводится понятие векторной функции подвижности (вектора подвижности) и исследуются ее свойства. Предлагаемая методика является попыткой применения метода траекторий корней для исследования чувствительности.

К решению вопроса о чувствительности корней характеристического уравнения можно подойти с двух позиций. Во-первых, можно построить функцию подвижности корней, если заданы траектории, по которым перемещаются корни при изменении параметра. При этом можно определить значение параметра, соответствующее минимальной чувствительности системы к флуктуациям этого параметра. Во-вторых, если параметр системы не изменяется в широких пределах, можно построить вектор подвижности для исследуемого корня характеристического уравнения, т. е. определить направление и «скорость» смещения корня, не прибегая к построению траекторий. При изменении нескольких параметров можно построить «звезду» векторов подвижности.

Очевидно, чувствительность всей системы в целом определяется значениями функции подвижности для всех корней характеристического уравнения. Однако, если система имеет ярко выраженные доминирующие корни, то чувствительность системы в основном будет определяться значениями функции подвижности только этих корней. Задаваясь областью допустимого смещения корней и используя функцию подвижности, можно определить условия, которые необходимо наложить на стабильность параметров. Кроме того, построив «звезду» векторов подвижности исследуемого корня, можно оценить степень влияния каждого из параметров на этот корень.

Функция подвижности корней характеристического уравнения при малых изменениях параметра и ее свойства

Характеристическое уравнение линейных (или линеаризованных) систем автоматического управления в большинстве случаев может быть приведено к виду

$$\Phi_n(p) + \alpha \Psi_m(p) = 0, \tag{1}$$

где $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы от p $(p=\delta+j\omega)$ степеней n и m с действительными коэффициентами, n и m — целые числа, причем $n \geqslant m$, α — параметр.

Пусть параметр α подвержен малым изменениям. Степень чувствительности системы к изменениям параметра может быть охарактеризована величиной смещения корней характеристического уравнения. Рассмотрим на плоскости собственных частот вектор $\vec{p}$, проведенный из начала координат в точку, являющуюся корнем характеристического уравнения. Введем векторную функцию

$$\vec{\lambda}_\alpha = \frac{d\vec{p}}{d\alpha} \tag{2}$$

и назовем ее функцией подвижности корня [3]. Если изменение параметра $\Delta\alpha$ мало, то смещение корня $\Delta\vec{p}$ можно представить в виде $\Delta\vec{p} = \vec{\lambda}_\alpha \Delta\alpha$.

Функция подвижности $\vec{\lambda}_\alpha$ может быть получена из характеристического уравнения (1) следующим образом.

Выразим

$$\alpha = -\frac{\Phi_n(p)}{\Psi_m(p)}. \tag{3}$$

Отсюда

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{\Psi_m^2(p)}{\Psi_m'(p)\Phi_n(p) - \Psi_m(p)\Phi_n'(p)}. \tag{4}$$

Подставив в правую часть (4) значение исследуемого корня, получим некоторое комплексное число, причем модуль этого числа определяет абсолютное значение вектора подвижности, а аргумент — его направление в исследуемой точке по отношению к положительному направлению действительной оси.

Вообще говоря, можно получить более общее выражение для функции подвижности. Действительно, если характеристическое уравнение системы приводится к виду

$$\Phi_n(p) + \varphi(\alpha)\Psi_m(p) = 0 \tag{5}$$

(где $\varphi(\alpha)$ — дифференцируемая функция параметра α), то функция подвижности запишется так:

$$\vec{\lambda}_\alpha = \frac{d\vec{p}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\alpha}. \tag{6}$$

Выражение функции подвижности (6) отличается от (2) сомножителем $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, причем $\varphi(\alpha)$ — известная функция.

Если траектории корней уравнения (1) заданы, то вектор $\vec{\lambda}_\alpha$ направлен по касательной к траектории в исследуемой точке в сторону возрастания параметра. В этом случае достаточно определить $|\vec{\lambda}_\alpha|$. В работе [3] для $|\vec{\lambda}_\alpha|$ получена формула

$$|\vec{\lambda}_\alpha| = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{f'_\delta}{f'_\omega}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\alpha}{\partial\delta} - \frac{\partial\alpha}{\partial\omega}\frac{f'_\delta}{f'_\omega}\right|}, \tag{7}$$

где $f(\delta, \omega)=0$ — уравнение траекторий, $\alpha=\alpha(\delta, \omega)$ — формула параметра. Если траектории корней не заданы, то вектор подвижности определяется по формуле (22), являющейся следствием формулы (4).

Функция подвижности в форме (4) или (7) является функцией комплексного переменного p, или, что то же самое, функцией δ и ω. Применяя формулу параметра $\alpha=\alpha(\delta, \omega)$ [2], можно перейти к рассмотрению $\vec{\lambda}_\alpha$ как функции α и строить модуль функции подвижности ($|\vec{\lambda}_\alpha|$) в координатах $\lambda(\alpha)$. Значение функции подвижности для исследуемого корня в дальнейшем будем называть просто подвижностью данного корня. Функция $\lambda(\alpha)$ имеет следующие свойства.

1. Подвижность корней на траекториях определяется корневым портретом системы и не зависит от положения мнимой оси.

2. При приближении корней к кратным точкам траекторий, не являющихся предельными, подвижность стремится к бесконечности.

3. В простых точках траекторий, включая и простые начальные точки ($\alpha=0$), подвижность конечна.

4. Подвижность действительных корней, уходящих в бесконечность при $|\alpha|\to\infty$, определяется асимптотическим порядком системы $n-m$. Если $n-m=1$, т. е. система по параметру α асимптотически первого порядка, то $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty}\lambda(\alpha) = \lim\limits_{|\delta|\to\infty}|\vec{\lambda}_\alpha| = \text{const}$. Значение этой константы определяется из развернутого вида полиномов $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ и равно отношению коэффициентов при старших степенях этих полиномов. При $n-m>1$ подвижность действительных корней при $|\alpha|\to\infty$ стремится к нулю.

5. Подвижность комплексно-сопряженных корней, уходящих в бесконечность при $|\alpha|\to\infty$, стремится к нулю всегда.

6. При приближении корней к конечным предельным точкам ($|\alpha|\to\infty$) подвижность этих корней стремится к нулю.

Свойство 1 вытекает из свойств траекторий [2]. Свойства 2—6 доказываются в приложении.

Свойства функции подвижности можно проиллюстрировать следующим примером. Рассмотрим характеристическое уравнение системы третьего порядка

$$p(p+2)^2+\alpha=0. \tag{8}$$

Траектории корней уравнения (8) при изменении α от 0 до $+\infty$ приведены на рис. 1. Стрелкой указано направление движения корней из начальных точек (обозначенных крестами) при увеличении параметра α. Зависимость $\lambda(\alpha)$ вдоль траекторий корней этого уравнения показана на рис. 2. Ветви траекторий и соответствующие им ветви функции $\lambda(\alpha)$ обозначены на рисунке цифрами. Из рис. 2 видно, что при приближении корней к кратной точке на действительной оси $\delta = -0{,}66$ $(\alpha = 1{,}18)$ подвижность корней на ветвях *1*, *2*, *3* неограниченно возрастает. Кроме того, в системе имеется еще кратная начальная точка $\delta = -2$ $(\alpha = 0)$. В этой начальной точке подвижность также бес-

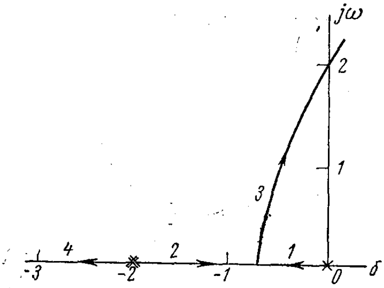

Рис. 1

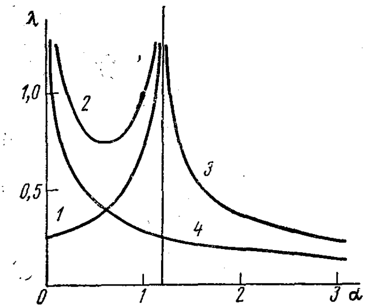

Рис. 2

конечна (ветви *2* и *4*). При увеличении α больше 1,18 подвижность корней на ветвях, уходящих в бесконечность (ветви *3* и *4*), монотонно убывает, причем $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \lambda(\alpha) = 0$. Бесконечное возрастание подвижности при приближении корней к кратным точкам связано с невозможностью реализации систем с кратными полюсами передаточной функции.

Исследование чувствительности системы «самолет—автопилот»

Применим полученные результаты для исследования чувствительности системы угловой стабилизации самолета [4] к изменениям реальных параметров. Характеристическое уравнение системы, приведенное к угловым ошибкам, имеет вид

$$Tp^4 + \left(1 + \frac{T}{T_\Omega}\right)p^3 + \left(\frac{1}{T_\Omega} + k_2 k_\delta + T k_\alpha\right)p^2 + (k_\alpha + k_1 k_\delta)\,p + k_0 k_\delta = 0. \quad (9)$$

В уравнении (9) T — постоянная времени автопилота, k_0, k_1, k_2 — коэффициенты усиления автопилота по углу, угловой скорости и угловому ускорению соответственно. Кроме того,

$$\frac{1}{T_\Omega} = \frac{m_z^{\Omega_z} \rho V s b_A^2}{2J_z}, \quad k_\alpha = \frac{m_z^\alpha \rho V^2 s b_A}{2J_z}, \quad k_\delta = \frac{m_z^\delta \rho V^2 s b_A}{2J_z},$$

где ρ — плотность воздуха, V — скорость полета, s — характерная площадь крыла, b_A — средняя аэродинамическая хорда крыла, J_z — момент инерции самолета вокруг соответствующей оси, $m_z^{\Omega_z}$, m_z^α и m_z^δ — аэродинамические коэффициенты. Рассмотрим вид функции подвижности для одного из параметров при изменении этого параметра, а также влияние различных параметров на положение доминирующих корней.

Рассмотрим подвижность корней уравнения (9) по параметру k_0 (1/*сек*) внутри всей области изменения этого параметра для системы стабилизации крена самолета. При этом $k_\alpha = 0$, так как момент аэродинамических сил при движении вокруг продольной оси равен нулю (при отсутствии управляющего воздействия). Примем, как и в работе [5], $T=0{,}1$ *сек*, $1/T_\Omega = 2{,}5\,{}^1/_{сек}$, $k_\delta = 30\,{}^1/_{сек}$, $k_1 = 1{,}1$, $k_2 = 0{,}16$ *сек*; кроме того, пусть $s = 10$ *м²*, $b_A = 2$*м*, $J_z = 20\,000$ *кГ·м·сек²*, $V = 900$ *км/час*, $\rho = 0{,}0372\,\frac{кГ\cdot сек^2}{м^4}$ (полет на высоте 11 *км*), $m_z^\delta = 25{,}806$ и $m_z^{\Omega_z} = 268{,}817$.

Подставив все значения параметров в уравнение (9), получим

$$0{,}1p^4 + 1{,}25p^3 + 7{,}3p^2 + 33p + 30k_0 = 0. \qquad (10)$$

На рис. 3 показаны траектории корней уравнения (10) при изменении параметра k_0 от нуля до критического значения $k_{0\,кр}=4{,}104$, при котором система возбуждается на частоте $\omega_{кр}=5{,}138$ 1/*сек*. Отдельные вет-

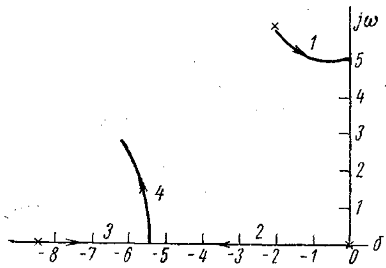

Рис. 3

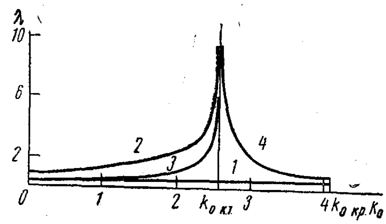

Рис. 4

ви траектории обозначены цифрами. Зависимость подвижности $\lambda(k_0)$ приведена на рис. 4. Номера кривых соответствуют номерам ветвей на рис. 3. Как видим, $\lambda(k_0)$ для ветвей *2*, *3* и *4* бесконечно возрастает при приближении параметра k_0 к значению $k_{0\,к.т.}=2{,}57$, соответствующему кратной точке траектории. Значение функции подвижности для ветви *1* практически не изменяется. В работах [5, 6] дан метод получения оптимальных значений коэффициентов k_0, k_1 и k_2, минимизирующих интегральную квадратичную ошибку.

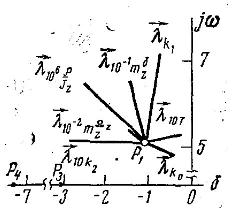

Рис. 5

Для рассматриваемой системы при заданных k_1 и k_2 оптимальное значение $k_0 \approx 2$. Тогда, учитывая, что k_0 допускает некоторые изменения в обе стороны [5], из рис. 4 следует, что с точки зрения уменьшения чувствительности желательно в допустимых пределах уменьшить значение коэффициента k_0. При этом подвижность корней на ветви *1* не изменится, а подвижность на ветвях *2* и *3* — уменьшится.

Исследуем влияние малых изменений параметров на доминирующие корни уравнения (10), полагая $k_0=2$. При этом доминирующие корни равны: $p_{1,2}=-1{,}165 \pm j5{,}107$; два других корня действительны и равны соответственно $p_3=-3{,}087$ и $p_4=-7{,}083$. На рис. 5 изображены вектора подвижности от параметров k_0, k_1, k_2, m_z^δ, $m_z^{\Omega_z}$, $\frac{\rho}{J_z}$ и T в точке p_1. Длина вектора равна модулю функции подвижности, а направление совпадает с направлением смещения корня при бесконечно малом возрастании параметра. Так как значения модулей функции подвижности существенно различны, то на рис. 5 для некоторых параметров введены масштабные коэффициенты.

Анализ величин и направлений векторов подвижности в исследуемой точке позволяет определить степень влияния изменений различных параметров на положение корня. Из рис. 5 видно, что увеличение T и k_0 ведет к уменьшению степени устойчивости, в то время как увеличение k_2 увеличивает степень устойчивости. Параметр k_1 почти не влияет на степень устойчивости, но изменяет частоту системы. Точно так же можно рассмотреть влияние и других параметров. Кроме того, существенным является вывод о возможности стабилизации положения доминирующих корней при малом изменении каких-либо неконтролируемых параметров за счет сознательного изменения других параметров. Например, пусть при изменении аэродинамических коэффициентов сместится корень p_1. Тогда, подбирая соответствующие приращения Δk_0, Δk_1 и Δk_2, можно с достаточной степенью точности вернуть этот корень в исходное положение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство свойств функции подвижности.

Свойства 2 и 3. Выражение (4) функции подвижности, записанное через полиномы $\Phi_n(p)$, $\Psi_m(p)$ и их производные, в знаменателе содержит левую часть уравнения возможных кратных точек траекторий корней [2]. Если корень приближается к кратной точке траекторий, то знаменатель выражения (4), уменьшаясь, стремится к нулю, в то же время числитель при конечных значениях корней — величина конечная. Поэтому при приближении корней к кратным точкам траекторий значение функции подвижности возрастает и стремится к бесконечности. Во всех остальных точках траекторий, включая и простые начальные ($\alpha=0$), знаменатель выражения (4) в нуль не обращается и значение функции подвижности конечно. Таким образом, свойства 2 и 3 функции подвижности доказаны.

Свойства 4 и 5. Для доказательства этих свойств рассмотрим предел функции подвижности $\lambda(\alpha)$ при $|\alpha|\to\infty$.

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\lambda(\alpha)=\lim_{p\to\infty}|\vec{\lambda}_\alpha|=\lim_{p\to\infty}\left|\frac{\Psi_m^2(p)}{\Phi_n(p)\Psi_m'(p)-\Phi_n'(p)\Psi_m(p)}\right|, \tag{11}$$

где

$$\Phi_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n=a_0(p^n+\bar{a}_1p^{n-1}+\ldots+\bar{a}_{n-1}p+\bar{a}_n)=a_0\bar{\Phi}_n(p) \tag{12}$$

$$\Psi_m(p)=b_0p^n+b_1p^{m-1}+\ldots+b_{m-1}p+b_m=b_0(p^m+\bar{b}_1p^{m-1}+\ldots+\bar{b}_{m-1}p+\bar{b}_m)=b_0\bar{\Psi}_m(p)$$

причем $n\geqslant m$.

Запишем формулу (11) в виде

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\lambda(\alpha)=\lim_{p\to\infty}\left|\frac{b_0}{a_0\left[\dfrac{\bar{\Phi}_n(p)\bar{\Psi}_m'(p)}{\bar{\Psi}_m^2(p)}-\dfrac{\bar{\Phi}_n'(p)}{\bar{\Psi}_m(p)}\right]}\right|. \tag{13}$$

Подсчитаем порядок полинома, полученного в знаменателе выражения (13), учитывая, что производная от полинома дает полином, порядок которого на единицу ниже порядка исходного полинома. Полином $Q=\dfrac{\bar{\Phi}_n\bar{\Psi}_m'}{\bar{\Psi}_m^2}$ имеет порядок $n+m-1-2m=n-m-1$.

Порядок полинома $R=\dfrac{\bar{\Phi}_n'}{\bar{\Psi}_m}$ равен $n-m-1$. Отсюда порядок полинома

$$G=Q-R \tag{14}$$

равен $n-m-1$. Поэтому при $n-m=1$

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\lambda(\alpha)=\frac{b_0}{a_0}, \tag{15}$$

а при $n-m>1$

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\lambda(\alpha)=0. \tag{16}$$

Таким образом, если действительный корень уходит в бесконечно удаленную предельную точку, то его подвижность, в зависимости от асимптотического порядка $n-m$ характеристического уравнения, стремится либо к константе, либо к нулю. Комплексно-сопряженные корни могут уходить в бесконечность лишь в том случае, если асимптотический порядок характеристического уравнения больше единицы. Поэтому подвижность комплексно-сопряженных корней, уходящих в бесконечность, всегда стремится к нулю.

Свойства 4 и 5 функции подвижности доказаны.

Свойство 6. По определению предельные точки находятся из уравнения $\Psi_m(p)=0$. Если знаменатель выражения функции подвижности (4) конечен, то при приближении корня к предельной точке значение полинома $\Psi_m(p)$, уменьшаясь, стремится к нулю, следовательно, подвижность корня, приближающегося к предельной точке, также стремится к нулю.

Особо следует рассмотреть случай кратной предельной точки, так как в этом случае при приближении корня к предельной точке знаменатель выражения (4) также стремится к нулю и мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Пусть характеристическое уравнение имеет вид

$$\Phi_n(p)+\alpha(p-z)^k\,\Psi_l(p)=0, \tag{17}$$

где $k+l=m$, z — предельная точка k-той кратности. Тогда формула (4) будет иметь вид

$$\lambda=\frac{(p-z)^{2k}\Psi_l^2(p)}{\Phi_n(p)\cdot k(p-z)^{k-1}\Psi_l(p)+(p-z)^k\Psi_l'(p)\,\Phi_n(p)-\Phi_n'(p)\cdot(p-z)^k\,\Psi_l(p)}. \tag{18}$$

Поделим числитель и знаменатель выражения (18) на $(p-z)^k$ и перейдем к пределу при $p\to z$:

$$\lim_{p\to z}\lambda(\alpha)=\lim_{p\to z}\frac{(p-z)^k\,\Psi_l^2}{\Phi_n(p)\,\Psi_l(p)\dfrac{k}{p-z}+\Psi_l'(p)\,\Phi_n(p)-\Phi_n'(p)\,\Psi_l(p)}=0. \tag{19}$$

Таким образом, свойство 6 функции подвижности доказано.

Значения функции подвижности в точках экстремума траекторий.

При построении функции подвижности легко можно определить значение $\lambda(\alpha)$ в точках экстремума траекторий. Положив в (7) $f_\delta'(\delta,\omega)=0$ (необходимое условие экстремума), получим

$$\lambda_э=\frac{1}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial\delta}}. \tag{20}$$

Нетрудно показать, что для точек, в которых существует вертикальная касательная к траектории $(f_\omega'(\delta,\omega)=0)$,

$$\lambda=\frac{1}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial\omega}}. \tag{21}$$

Расчетные формулы для получения векторной функции подвижности.

При использовании ЭЦВМ для вычисления значений функции подвижности удобно пользоваться выражением полиномиального вида

$$\lambda=\frac{\sqrt{C^2+\omega^2D^2}}{A^2+\omega^2B^2}\,e^{j\operatorname{arctg}\omega\frac{D}{C}}, \tag{22}$$

где

$$A=(\Phi_r\Psi_r'-\Phi_r'\Psi_r)+\omega^2(\Phi_i'\Psi_i-\Phi_i\Psi_i'),$$

$$B=(\Phi_i\Psi_r'-\Phi_i'\Psi_r)+(\Phi_r\Psi_i'-\Phi_r'\Psi_i),$$

$$C=A\Psi_r^2-A\omega^2\Psi_i^2+2\omega^2\Psi_r\Psi_iB,$$

$$D = 2A\Psi_r\Psi_i - B\Psi_r^2 + \omega^2 B\Psi_i^2.$$

Выражение (22) получено подстановкой

$$\Phi_n = \Phi_r + j\omega\Phi_i, \quad \Psi_m = \Psi_r + j\omega\Psi_i,$$

$$\Phi_n' = (\Phi_r)_\delta' + j\omega(\Phi_i)_\delta', \quad \Psi_m' = (\Psi_r)_\delta' + j\omega(\Psi_i)_\delta'.$$

в (14). Значения Φ_r, Φ_i, Ψ_r и Ψ_i приведены в [2].

Приведенные формулы позволяют вычислить функцию подвижности для систем любого порядка.

Авторы благодарны Г. А. Бендрикову за обсуждение результатов этой работы, а также В. А. Брычихину за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокотович П. В., Рутман Р. С. «Автоматика и телемеханика», **26**, № 4, 1965.
2. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
3. Григорьев А. М., Лисаков Ю. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 2, 1968.
4. Боднер В. А., Козлов М. С. Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты. М., Оборонгиз, 1961.
5. Матыцин В. Д., Ряполов В. А. «Автоматика и телемеханика», **20**, № 4, 1959.
6. Матыцин В. Д. «Автоматика и телемеханика», **24**, № 4, 1963.

Поступила в редакцию
7.5 1968 г.

Кафедра
физики колебаний