

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1969

УДК 534.64

К. А. ВЕЛИЖАНИНА, Н. Н. ВОРОНИНА

ИЗЛУЧЕНИЕ ЩЕЛИ В ПЕРЕГОРОДКЕ ВОЛНОВОДА, НАГРУЖЕННОГО ПРОИЗВОЛЬНЫМ ИМПЕДАНЦЕМ

Дается теоретический расчет излучения щели в перегородке трубы с произвольным оконечным импеданцем. Показано влияние оконечного импеданца на реактивную и на активную часть импеданца щели.

Обычно при расчете входного импеданца слоя, покрытого со стороны падения звука перфорированной панелью, импеданц последней полагают чисто реактивным. Как следует из работы [1], разница в его значениях зависит от того, плотно или неплотно панель примыкает к слою пористого материала, поскольку перфорированная панель искривляет поток в некоторой области. Если эта искривленная отверстием часть потока попадает в слой пористого материала, то в выражении импеданца появляется дополнительная активная и реактивная составляющие. Согласно работе [2], в которой отверстие рассматривается как поршневая диафрагма, излучающая в прилегающую пористую среду, этот эффект обусловлен взаимодействием ближнего поля (высшие моды) со средой. Активный компонент панели может быть обусловлен также потерями в отверстии, возникающими за счет вязкости протекающего через него воздуха. Однако для отверстий, обычно употребляемых на практике, эти потери пренебрежимо малы [3].

В строительной практике звукопоглощающий материал часто используют в сочетании с панелью, имеющей щелевую перфорацию. Задача о присоединенной массе щелевого экрана была решена в работе [4]. В работе [5] исследовано обтекание решеток потоком идеальной жидкости, откуда можно получить выражение для присоединенной массы, применив задачу о распространении электромагнитных волн в волноводе с поперечной диафрагмой [6] к случаю звуковой волны. В работе [7] получено также значение концевой поправки и присоединенной массы. Если звуковая волна падает на такую щелевую панель нормально, то задача нахождения импеданца сводится к распространению волны в прямоугольном волноводе с жесткими стенками, ширина которого равна шагу перфорации и который заполнен звукопоглощающим материалом. В начальном сечении волновода помещена перегородка с симметричной щелью. Подобные задачи, как известно, можно решить путем разложения потенциала скоростей в бесконечный

ряд по собственным функциям. При этом коэффициенты ряда определяются из граничных условий в начальном и конечном сечении волновода. Отдельные члены ряда называются нормальными или волновыми модами, каждой из которых соответствует определенное волновое число [8, 9].

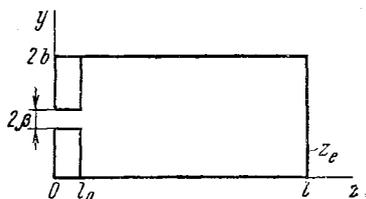


Рис. 1

Используя этот способ, найдем импеданс симметричной щели в перегородке, стоящей поперек квадратной трубы площади $S=(2b)^2$, заполненной воздухом и закрытой жесткой стенкой на конце при $z=l$. Если щель площади $S_0=2\beta \cdot 2b$ расположена в начальном сечении $z=l_0$ (рис. 1), то для потенциала скоростей получим

$$\Phi(x, y, zt) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (A_{m_1 n_1} e^{j k_p z} + B_{m_1 n_1} e^{j k_p z}) \cos k_{m_1} x \cdot \cos k_{n_1} y \cdot e^{j \omega t}, \quad (1)$$

где $k^2 = k_{m_1}^2 + k_{n_1}^2 + k_p^2 = k_{m_1 n_1}^2 + k_p^2$, а

$$k_{m_1} = \frac{m_1 \pi}{2b} \quad \text{и} \quad k_{n_1} = \frac{n_1 \pi}{2b}$$

волновые числа колебаний по осям x и y . Коэффициенты ряда $A_{m_1 n_1}$ и $B_{m_1 n_1}$ получаются из граничных условий при поршневом распределении скоростей при $z=l_0$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=l_0} &= U(x, y, l_0) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \alpha_{m_1 n_1} \cos k_{m_1} x \cdot \cos k_{n_1} y = \\ &= \begin{cases} U_0 & b - \beta < y < b + \beta \\ 0 & \begin{cases} b + \beta < y < 2b \\ 0 < y < b - \beta \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\alpha_{m_1 n_1} = \frac{v_{m_1 n_1}}{S} \int_0^{2b} \int_{-\beta}^{b+\beta} U_0 \cos k_{m_1} x \cdot \cos k_{n_1} y \cdot dx \cdot dy,$$

$$v_{m_1 n_1} = 4 \quad \text{при} \quad m_1 \neq 0, n_1 \neq 0, \quad v_{m_1 0} = v_{0 n_1} = 2, \quad v_{00} = 1$$

$$\text{и} \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0 \quad \text{при} \quad z=l.$$

Вследствие симметричности щели в выражении (1) остается суммирование только по четным n_1 ($n_1 = 2, 4, 6, 8 \dots$). Обозначая

$$n = \frac{n_1}{2}, \quad \eta = \frac{2\beta}{2b} \quad \text{и} \quad F_n(\eta) = \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta}$$

в начальном сечении при $z=l_0$ (если выделить нулевую моду $m=0$, $n=0$), получим

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{u_0 \operatorname{cth} k(l-l_0)}{k} e^{j(\omega t - k l_0)} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{2U_0 \eta F_n(\eta) \cdot [e^{j k_p 2(l-l_0)} + 1]}{j k_p [e^{j k_p 2(l-l_0)} - 1]} \cos k_n y \cdot e^{j \omega t}. \quad (3)$$

При k_p действительном, т. е. при $k > k_n$, моды высших порядков будут распространяться вдоль оси трубы, создавая наряду с поршневой или нулевой модой стоячие волны. Нас интересует случай $k < k_n$, т. е. случай распространяющейся нулевой моды и затухающих мод высших порядков. Для этого случая запишем второй член соотношения (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U_0 \eta F_n(\eta)}{jk_p} \cdot \text{cth } k_p(l - l_0) \cdot \cos k_n y \cdot e^{i\omega t},$$

где $jk_p = \sqrt{k_n^2 - k^2} = k_n \sqrt{1 - (k/k_n)^2} = k_n \alpha$.

Сила давления, действующая в щели:

$$\Psi(x, y, l_0, t) = \int_0^{2b+\beta} \int_{b-\beta}^b \rho_0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot dx \cdot dy. \quad (4)$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в (4), так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\eta) \cos k_n y$ сходится, а также полагая $l_0 \cong 0$, запишем импеданс щели $Z = \Psi/U_0$ в виде

$$Z = \eta S_0 \rho_0 c_0 \text{cth}(kl) + jk \rho_0 c_0 S_0 \eta 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(\eta)}{jk_p} \text{cth}(k_p l) = \eta S_0 \rho_0 c_0 \text{cth}(kl) + jZ_{jl}. \quad (5)$$

Через Z_{jl} обозначен второй член, $Z_{jl} = j\omega M_l = j\rho_0 S_0 \delta_l$. Здесь M_l — присоединенная масса с внутренней стороны щели, а δ_e — концевая поправка с той же стороны. При $l \rightarrow \infty$, $\text{cth } k_p l \rightarrow 1$ второй член выражения (5) совпадает с выражением присоединенной массы, полученным в работе (6) для случая щели в бесконечно длинной трубе. По мере уменьшения l присоединенная масса возрастает и при $l \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. По рекомендации С. Н. Ржевкина решение задачи о присоединенной массе щели в прямоугольной перегородке может рассматриваться как решение задачи о присоединенной массе бесконечного ряда параллельных друг другу щелей бесконечной длины (щелевой решетки). Это можно обосновать, представив себе зеркальное отражение щели $S_0 = 2\beta \cdot 2b$ и перегородки $= (2b)^2$ в боковых сторонах и последующие отражения этих отражений. Для такой щелевой решетки величина длины щели уже не играет роли и имеет смысл говорить об импедансе, присоединенной массе и поправке на конце на единицу длины щели. Перфорированную панель со щелями можно, следовательно, рассматривать как щелевую решетку.

Если труба заполнена звукопоглощающим материалом, то в выражении (5) вместо $\rho_0 c_0 = W_0$ и k следует подставить значение волнового сопротивления W и постоянной распространения γ для данного материала. Для того чтобы получить значение входного импеданца, нужно также учесть импеданс воздушной пробки в отверстии панели и присоединенную массу со стороны падения звука $M = \rho_0 S_0 \delta$ (где δ — поправка на конец с той же стороны). Тогда запишем:

$$Z_{\text{вх}} = \eta S_0 W \text{cth } \gamma l + j2\eta S_0 W \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(\eta)}{|jk_p|} \text{cth } k_p l + j\omega \rho_0 S (\delta + l_0). \quad (6)$$

Величина $W \operatorname{cth} \gamma l$ в формуле (6) представляет собой импеданс пористого слоя $Z_{\text{сл}}$. Обычно $k_e < k_n$, тогда $jk_p \approx k_n$, а при толщине слоя l , значительно большей, чем λ_n , имеем $|k_n l| \gg 1$, $\operatorname{cth} k_n l \cong 1$ и $\delta_l = \delta$.

Используем также приближенные выражения для W и γ :

$$W = W_0 \sqrt{\left(m - j \frac{r}{\omega \rho_0}\right) \frac{1}{Pq}},$$

$$\gamma = k \sqrt{\left(m - j \frac{r}{\omega \rho_0}\right) Pq},$$

где P — пористость, r — сопротивление на продувание или постоянная сопротивления, m — структурный фактор, q равно отношению теплоемкости c_p при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме c_v . Как показано в работе [7], величины P , r и m являются частотно независимыми и могут быть определены из опыта. Выражая $Z_{\text{вх}}$ в долях $\rho_0 c_0$, с учетом акустической трансформации, получим входной импеданс

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{сл}} + \frac{r\delta}{\eta W_0} + j \frac{k}{\eta} [l_0 + \delta(1 + m)]. \quad (7)$$

Как следует из формулы (7), в выражении входного импеданса при плотном контакте действительно появились дополнительные активная и реактивная составляющие.

Если между слоем и панелью имеется воздушный промежуток, то возможно, что высшие моды затухнут не доходя до пористого слоя. Тогда можно предположить, что справедливо выражение для случая щели в бесконечной трубе. В общем случае импеданс, по-видимому будет отличаться от случая бесконечной трубы, причем это отличие будет зависеть как от частоты, так и от импеданса слоя и глубины воздушного промежутка. Найдем импеданс щели, излучающей в трубу, на границе которой имеется слой или система с заданным импедансом Z_e . Учитывая, что при $z=l$ $P/u|_{z=l} = Z_l = R + jY$, получаем (исключая нулевую моду) импеданс

$$Z|_{z=0} = j2\omega\eta S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(\eta)}{k_n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{k_n}\right)^2}} \cdot Q, \quad (8)$$

где

$$Q = \frac{\omega \rho_0 [e^{jk_p l} - e^{-jk_p l}] + jk_p Z_l [e^{jk_p l} + e^{-jk_p l}]}{j\omega \rho_0 [e^{jk_p l} + e^{-jk_p l}] + k_p Z_l [e^{jk_p l} - e^{-jk_p l}]} \quad (9)$$

Его реактивная часть будет:

$$Z_j = 2j\omega \rho_0 S_0 \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(\eta)}{k_n \alpha} \cdot Q_r. \quad (10)$$

Здесь

$$Q_r = \frac{R^2 + Y^2 + \left(\frac{k}{k_n \alpha}\right)^2 \operatorname{cth}(k_n \alpha l) + \frac{Yk}{k_n \alpha} [\operatorname{cth}^2(k_n \alpha l) + 1]}{R^2 + \left[\frac{k}{k_n \alpha} \operatorname{cth}(k_n \alpha l) + Y\right]^2}, \quad (11)$$

а R и Y , выраженные в долях $\rho_0 c_0$, компоненты импеданца Z_l . При $R=0$ и $Y \rightarrow \infty$ $Q = \text{cth}(k_n a l)$, т. е., мы имеем случай трубы, закрытой жесткой стенкой (формула (5)). При $R = \rho_0 c_0$, $Y = 0$ и $l \rightarrow \infty$, т. е. в случае безграничной среды без потерь, Q_r равно единице.

Действительная часть импеданца определяется из соотношения

$$Z_r = -2\omega S_0 \rho_0 \eta b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(\eta)}{k_n \alpha} \cdot Q_j, \quad (12)$$

где

$$Q_j = \frac{R \frac{k}{k_n \alpha} [1 - \text{cth}(k_n a l)]}{R^2 + \left[\frac{k}{k_n \alpha} \text{cth}(k_n a l) + Y \right]^2}, \quad (13)$$

причем $Q_j \leq 0$. Вводя переменные $\frac{b}{\lambda} = d$ и $\frac{l}{\lambda} = h$, получим

$$k_n \alpha l = \frac{n\pi h}{d} \sqrt{1 - \left(\frac{2d}{n}\right)^2}, \quad \frac{k}{k_n \alpha} = \frac{2d}{n \sqrt{1 - \left(\frac{2d}{n}\right)^2}},$$

и тогда Z можно выразить в зависимости от R и Y при заданных d, h, λ .

Как иллюстрация на рис. 2 даны значения реактивного (а) и активного (б) компонентов акустического импеданца щели $Z_j/S_0 \rho_0 c_0 \eta$ и $Z_r/S_0 \rho_0 c_0 \eta$ для $\eta = 0,1$, $d = 0,05$, $h = 0,005$ (кривая 1) в зависимости от Y при (R , взятом как параметр) $R = 0,2$ (кривая 1), $R = 0,6$ (кривая 2), $R = 1$ (кривая 3) и при $h = 0,01$, $h = 0,015$ для R , взятых в той же последовательности (кривые 4, 5, 6 и 7, 8, 9).

Значения $Z_j/S_0 \rho_0 c_0 \eta$ для разных R при $Y > 0$ и $Y < -2$ стремятся к некоторым постоянным пределам, зависящим от h . Чем меньше h , тем больше вклад высших мод, тем выше предельные значения Z_j . Наличие активного компонента импеданца обусловлено затуханием высших мод в звукопоглощающем слое. С возрастанием h при $R = \text{const}$, а также R при $h = \text{const}$ максимальные значения Z_r и Z_j уменьшаются и кривые становятся более пологими. При этом вклад нулевой моды не учитывается. Для нулевой моды удельный акустический импеданц будет

$$\frac{Z_0}{S_0 \rho_0 c_0 \eta} = (Z_{0r} + jZ_{0j}) \frac{1}{S_0 \rho_0 c_0 \eta} = Q_0, \quad (14)$$

где

$$Q_0 = \frac{R [1 + \text{ctg}^2(kl)] + j(1 - Y^2 - R^2) \text{ctg}(kl) + jY (\text{ctg}^2(kl) - 1)}{R^2 + [\text{ctg}(kl) - Y]^2}. \quad (15)$$

Формула для нулевой моды является обычной формулой переносного импеданца.

Полный входной импеданц будет:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{S_0 \rho_0 c_0 \eta} [Z_{0r} + Z_r + j(Z_{0j} + Z_j)] + j \frac{k}{\eta} (l_0 + \delta). \quad (16)$$

На рис. 3 показаны графики Z_{j0} и Z_{r0} , рассчитанные по формуле (15) для $h = 0,005$; $R = 0,2, 0,6, 1$ (кривые 1, 2, 3); $h = 0,01$ и $h = 0,015$ для тех же R (кривые 4, 5, 6 и 6, 7, 8).

$$Z_i' = \frac{Z_i}{S_0 \rho_0 c_0 \eta} \quad \frac{Z_r}{S_0 \rho_0 c_0 \eta} = Z_r'$$

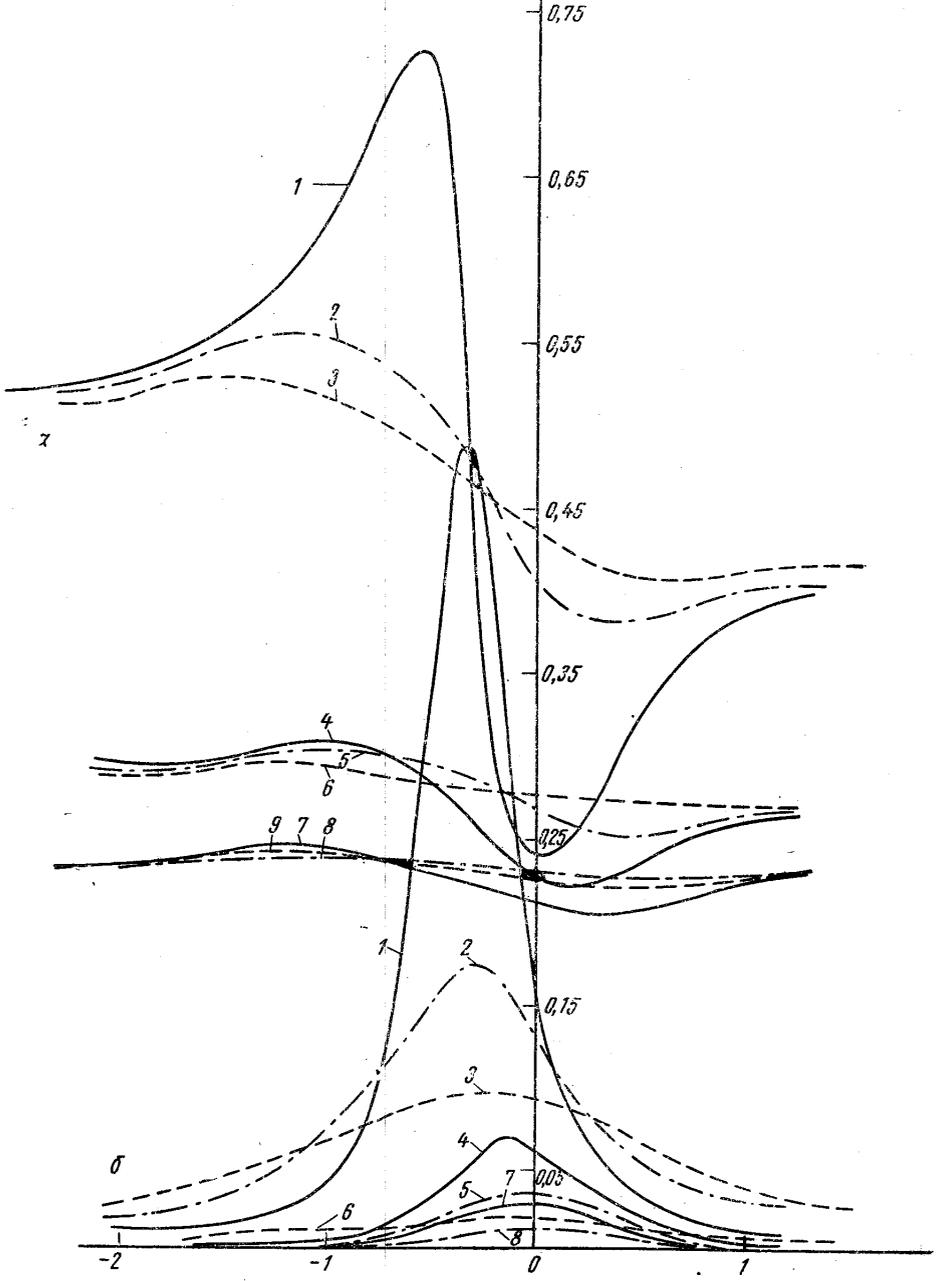


Рис. 2

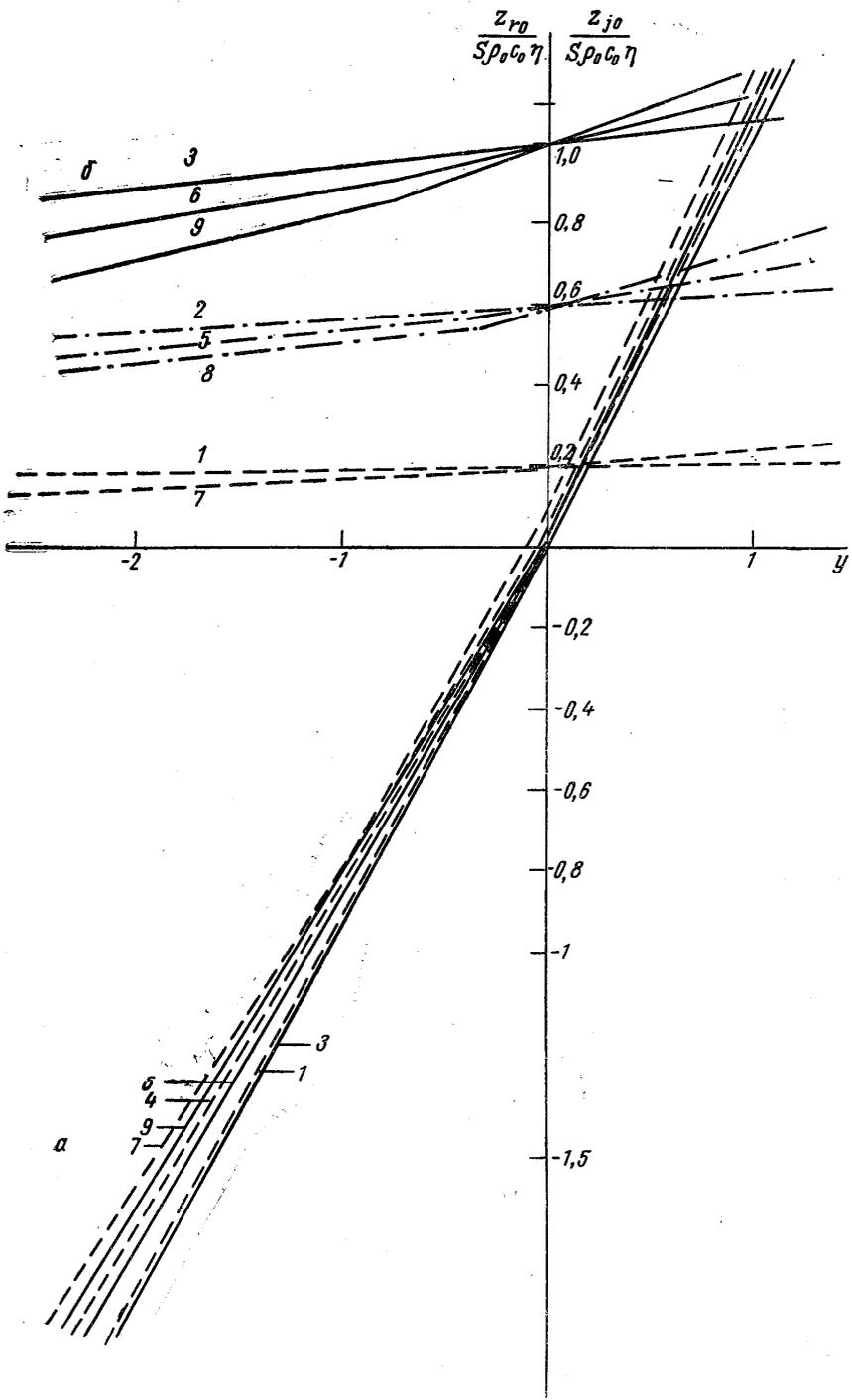


Рис. 3

Рассмотрим пример. Пусть решетка имеет шаг $2b=8$ см и ширину щели $2\beta=1$ см. На расстоянии $l=0,8$ см от панели помещен слой с заданной частотной зависимостью импеданца. Зададим $d=\frac{b}{\lambda}=0,1$, тогда при $l=4$ см длина волны λ будет равна 40 см, что соответствует частоте $f=861$ гц. При $l=0,8$ см будем иметь $h=0,02$. На этой частоте импеданц слоя равен $Z=0,5-j 0,3$. Подсчет по формулам (14), (15) и (16) дает $Z_{вх}=1,03+j 1,4$ и коэффициент звукопоглощения $\alpha=0,68$.

При неплотном контакте панели и слоя обычно считается, что результирующий импеданц равен сумме импеданца слоя и импеданца панели, который полагают чисто реактивным. Если следовать этим рекомендациям, то для коэффициента звукопоглощения получается значение $\alpha=0,74$.

В качестве иллюстрации теории на рис. 4 приведена частотная характеристика реактивного (а) и активного (б) компонента импеданца щелевой панели, имеющей $2\beta=0,09$, $2b=0,89$ и $\eta=0,112$. Панель покрывает слой звукопоглощающего материала (штапельное стекловолокно марки А), толщиной $l=4$ см, расположенного на расстоянии $L=6$ см от жесткой стенки при плотном и неплотном контакте.

При неплотном контакте величина $h=l/\lambda$ изменялась от 0,003 при $f=400$ гц до 0,02 при $f=2500$ гц. Как следует из графика, экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретические кривые. Надо отметить, что во всем диапазоне исследуемых частот согласно расчетам по формуле (16) высшие моды затухнут, не доходя до слоя, и не дадут вклада в активное сопротивление.

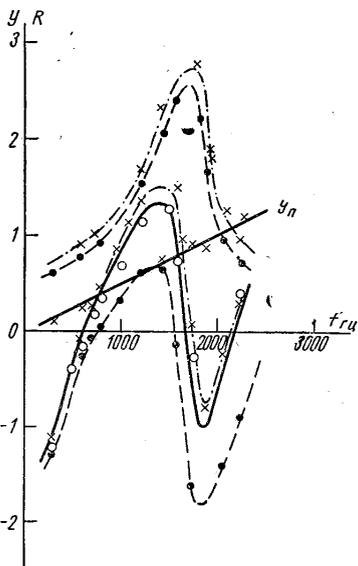


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Callaway, R. Amer. J.A.S.A. 24, 309, 1952.
2. Ingard U. J.A.S.A., 26, No. 2, 151—154, 1954.
3. Велижанина К. А. ЖТФ, 21, вып. 9, 1087—1099, 1951.
4. Малюжинец Г. Д. Реферат канд. диссертации. МГУ, 1938.
5. Гуревич. «Прикладная математика и механика», 4, вып. 2, 1940.
6. Левин Л. Современная теория волноводов. М., ИЛ, 1954.
7. Грешилов Е. Дипломная работа. Физфак МГУ, 1960.
8. Ingard U. J.A.S.A., 20, No. 5, 665—682, 1948.
9. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.
10. Ingard U. J.A.S.A., 25, No. 6, 1037—1061, 1953.
11. Велижанина К. А. «Акуст. журн.», вып. 2, 65—137, 1961.

Поступила в редакцию
21.5 1968 г.

Кафедра
Акустики