Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1969

УДК 521.6

Л. Г. ЛУКЬЯНОВ

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ТЕЛА НА ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Построена аналитическая теория движения бесконечно малой массы вблизи треугольных лагранжевых решений.

Введение

Рассматривается движение тела бесконечно малой массы в рамках дважды ограниченной задачи четырех тел, согласно которой движения трех тел конечной массы проистекают по законам задач двух тел, а именно основные тела движутся по эллиптическим орбитам относительно их общего центра масс, а возмущающее тело — по эллиптической орбите другого эксцентриситета относительно этого же центра масс. Получено общее решение уравнений в вариациях рассматриваемой задачи. Это решение используется для исследования движения вблизи треугольных лагранжевых решений системы Земля—Луна при учете возмущений от Солнца. Проведено сравнение полученных теоретических результатов с результатами численного интегрирования уравнений движения.

Задачу о движении бесконечно малой массы в поле тяготения трех конечных масс обычно называют ограниченной задачей четырех тел.

Определение движения трех тел конечных масс представляет собой общую задачу трех тел, решение которой связано со значительными трудностями. В связи с этим ниже вводится некоторое предположение, позволяющее заранее знать движения трех тел конечных масс.

В дальнейшем будем называть тела с массами m_1 и m_2 основными, а тело с массой m_3 — возмущающим телом.

Движения трех тел конечных масс будут известны, если предположить, что движение возмущающего тела определяется задачей двух тел, одно из которых само возмущающее тело, а второе — некоторое фиктивное тело, расположенное в центре масс основных тел и имеющее массу, равную сумме масс основных тел. Иными словами, движение возмущающего тела зависит от положения центра масс основных тел и суммы их масс и не зависит от их взаимного расположения относительно центра масс и распределения масс между ними; и наоборот, относительное движение основных тел не зависит от возмущающего тела. Следовательно, задача о движении основных тел относительно их центра масс есть также задача двух тел.

Изложенное предположение о движении возмущающего тела в действительности никогда, строго говоря, не выполняется, однако погрешности, возникающие от этого предположения, тем меньше, чем больше расстояние от возмущающего тела до центра масс основных тел по сравнению с взаимным расстоянием между основными телами.

Задачу о движении бесконечно малой массы в поле тяготения трех конечных масс, движение которых подчиняется вышевведенному предположению, будем называть дважды ограниченной задачей четырех тел.

Таким образом, дважды ограниченная задача четырех тел получится из общей задачи четырех тел, если на последнюю наложить два ограничения:

— одно из тел имеет бесконечно малую массу и, следовательно, на движение трех тел конечных масс не влияет;

— одно из тел конечных масс (возмущающее тело) движется по законам задачи двух тел относительно некоторого фиктивного тела, расположенного в центре масс двух других тел конечных масс (основных тел) и имеющего массу, равную сумме масс основных тел; следовательно, возмущающее тело на относительное движение основных тел не влияет.

В соответствии с различными типами движений задачи двух тел можно рассматривать различные случаи дважды ограниченной задачи четырех тел, например, гиперболо-эллиптическая дважды ограниченная задача, эллиптическо-круговая дважды ограниченная задача и т. д.

Дифференциальные уравнения дважды ограниченной задачи четырех тел получатся из дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел [1], если в последние ввести возмущающую функцию. В системе координат с началом в центре масс основных тел эти уравнения можно записать в виде

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \eta}, \qquad (1)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \zeta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta},$$

где $W = f\left(\frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2}\right)$ — силовая функция

$R = fm_3\left(\frac{1}{\Delta_3} - \frac{\xi\xi_3 + \eta\eta_3 + \zeta\zeta_3}{\rho^3}\right)$ — пертурбационная функция

$$\Delta_j^2 = (\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2 + (\zeta - \zeta_j)^2, \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$\rho^2 = \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2.$$

Координаты тел конечных масс ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, ξ_3, η_3, ζ_3 являются известными функциями времени, так как они определяются соответствующей задачей двух тел, но эти функции имеют различный вид в зависимости от типа движения.

В рамках эллиптическо-эллиптической дважды ограниченной задачи четырех тел в настоящей работе исследуется движение тела бесконечно малой массы вблизи треугольных лагранжевых решений ограниченной эллиптической задачи трех тел.

§ 1. Разложение пертурбационной функции. Уравнения в вариациях

Рассмотрим движение бесконечно малой массы под действием притяжения двух основных тел, которые движутся по кеплеровским эллипсам с эксцентриситетом e. Кроме того, имеется возмущающее тело, которое движется относительно центра масс основных тел по эллипсу с эксцентриситетом e_s.

Для исследования воспользуемся координатами Нехвила x, y, z. В качестве независимой переменной используем истинную аномалию v основных тел с массами μ и $(1-\mu)$. Начало координат G расположим в центре масс основных тел, а плоскость Gxy совместим с плоскостью их движения, причем ось Gx направим на меньшую массу μ. Единицы измерений выберем так, чтобы сумма масс основных тел, постоянная тяготения и расстояние между основными телами равнялись единице.

Дифференциальные уравнения движения бесконечно малой массы в указанной системе координат получаются из системы (1) аналогично тому, как это делается в ограниченной задаче трех тел [1].

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} &= \bar{r}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\right),\\
\frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} &= \bar{r}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\right),\\
\frac{d^2z}{dv^2} &= \bar{r}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Omega = \frac{1-\mu}{\Delta_1} + \frac{\mu}{\Delta_2} + \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{ez^2\cos v}{2},$$

$$R = \mu_s\left(\frac{1}{\Delta_s} - \frac{xx_s + yy_s + zz_s}{\bar{\rho}^3}\right),$$

μ_s, u_s, v_s — масса, аргумент широты и истинная аномалия возмущающего тела;

$$\Delta_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2 + z^2, \quad \Delta_2^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2,$$

$$\Delta_s^2 = (x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2, \quad \bar{\rho}^2 = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2, \quad \rho = \bar{\rho}\,\bar{r},$$

$$x_s = \bar{\rho}\,(\cos u_s \cos\Omega_s - \sin u_s \sin\Omega_s \cos i_s),$$

$$y_s = \bar{\rho}\,(\cos u_s \sin\Omega_s + \sin u_s \cos\Omega_s \cos i_s),$$

$$z_s = \bar{\rho}\,\sin u_s \sin i_s,$$

$$u_s = \omega_s + v_s, \quad \Omega_s = \Omega_{s0} - v, \quad \rho = \frac{p_s}{1 + e_s\cos v_s}, \quad \bar{r} = \frac{1}{1 + e\cos v},$$

e_s, p_s, i_s, ω_s, Ω_s — элементы орбиты возмущающего тела. Известно, что при $\mu_s = 0$ уравнения (2) имеют частное решение L_4 [1]:

$$x_0 = \alpha = \frac{1-2\mu}{2}, \quad y_0 = \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_0 = 0.$$

Сделаем перенос начала координат в точку L_4:

$$\xi = x - \alpha, \quad \eta = y - \beta, \quad \zeta = z.$$

Пертурбационную функцию R разложим в ряд по полиномам Лежандра:

$$R = \frac{\mu_s}{\bar{\rho}}\left[1 + \left(\frac{\Delta_G}{\bar{\rho}}\right)^2 P_2(\cos H) + \left(\frac{\Delta_G}{\bar{\rho}}\right)^3 P_3(\cos H) + \ldots\right],$$

где $P_2(\cos H)$, $P_3(\cos H)$, ... — полиномы Лежандра,

$$\Delta_G^2 = (\xi + \alpha)^2 + (\eta + \beta)^2 + \zeta^2, \quad \cos H = \frac{(\xi + \alpha)(\xi_s + \alpha) + (\eta + \beta)(\eta_s + \beta) + \zeta\zeta_s}{\Delta_G \bar{\rho}}.$$

В дальнейшем в R будем учитывать только $P_2(\cos H)$.

Кроме того, пертурбационную функцию R разложим в ряд Тейлора по степеням координат ξ, η, ζ. Тогда получим:

$$R = \frac{\mu_s}{\bar{\rho}^3}\Big\{[3a_1(\alpha a_1 + \beta a_2) - \alpha]\,\xi + [3a_2(\alpha a_1 + \beta a_2) - \beta]\,\eta +$$

$$+ 3a_3(\alpha a_1 + \beta a_2)\,\zeta + (3a_1^2 - 1)\frac{\xi^2}{2} + (3a_2^2 - 1)\frac{\eta^2}{2} +$$

$$+ (3a_3^2 - 1)\frac{\zeta^2}{2} + 3a_1a_2\xi\eta + 3a_1a_3\xi\zeta + 3a_2a_3\eta\zeta + \ldots\Big\},$$

где

$$a_1 = \frac{\xi_s + \alpha}{\bar{\rho}}, \quad a_2 = \frac{\eta_s + \beta}{\bar{\rho}}, \quad a_3 = \frac{\zeta_s}{\bar{\rho}}.$$

Это выражение для пертурбационной функции позволяет записать уравнения в вариациях рассматриваемой задачи в виде:

$$\frac{d\tilde{x}}{dv} = \tilde{x}' = \tilde{P}\tilde{x} + \nu\tilde{Q}\tilde{x} + \nu\tilde{q}, \qquad (3)$$

где

$$\tilde{x} = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Vmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{r}\frac{3}{4} & \bar{r}(1-2\mu)\sqrt{3}\frac{3}{4} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \bar{r}(1-2\mu)\sqrt{3}\frac{3}{4} & \bar{r}\frac{9}{4} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\nu = \frac{\mu_s}{\rho^3},$$

$$\tilde{Q} = \bar{r}^4\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3a_1^2 - 1 & 3a_1a_2 & 3a_1a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 3a_1a_2 & 3a_2^2 - 1 & 3a_2a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 3a_1a_3 & 3a_2a_3 & 3a_3^2 - 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{q} = \bar{r}^4\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3a_1(\alpha a_1 + \beta a_2) - \alpha \\ 3a_2(\alpha a_1 + \beta a_2) - \beta \\ 3a_3(\alpha a_1 + \beta a_2) \end{Vmatrix}.$$

Следуя методу малого параметра [2], будем искать решение уравнений в вариациях в виде

$$x = x^{(0)} + \nu x^{(1)} + \ldots. \tag{4}$$

Ограничимся сначала определением общего решения с точностью до первой степени малого параметра включительно. Наклонение орбиты возмущающего тела i_s, эксцентриситет этой орбиты e_s и эксцентриситет орбит основных тел e будем считать малыми параметрами одинакового порядка с ν. Из этого следует, что при определении общего решения с точностью до первой степени малых параметров в матрицах $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{q}$ параметры e_s и i_s можно положить равными 0.

Тогда система (3) распадается на систему четвертого порядка для ξ и η и систему второго порядка для ζ:

$$x' = Px + \nu Qx + \nu q, \tag{5}$$

и

$$z' = Iz' + \nu Jz, \tag{6}$$

где

$$x = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi' \\ \eta' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{r}\,\frac{3}{4} & \bar{r}\,\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \bar{r}\,\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \bar{r}\,\frac{9}{4} & -2 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$Q = \bar{r}^4 \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3a_1^2 - 1 & 3a_1a_2 & 0 & 0 \\ 3a_1a_2 & 3a_2^2 - 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad q = \bar{r}^4 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a_1(\alpha a_1 + \beta a_2) - \alpha \\ 3a_2(\alpha a_1 + \beta a_2) - \beta \end{Vmatrix},$$

$$z = \begin{Vmatrix} \zeta \\ \zeta' \end{Vmatrix}, \quad I = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad J = \bar{r}^4 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Кроме того, с той же степенью точности можно считать, что $v_s = n_s v$, где n_s — среднее движение возмущающего тела.

§ 2. Общее решение уравнений в вариациях

Если искать решение уравнения (5) в виде (4), то для последовательного определения $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, ... получим уравнения:

$$\begin{aligned} x^{(0)'} &= Px^{(0)}, \\ x^{(1)'} &= Px^{(1)} + Qx^{(0)} + q, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Первое уравнение в этой системе определяет порождающее решение. Это уравнение представляет собой систему линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами периода 2π. Для определения порождающего решения разложим матрицу P в ряд Фурье:

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} \cos v + \ldots,$$

где

$$P^{(0)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx}\Omega_{xy} & & 0 & 2 \\ \Omega_{xy}\Omega_{yy} & & -2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad P^{(1)} = 2\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{xx}\Omega_{xy} & & 0 & 0 \\ \Omega_{xy}\Omega_{yy} & & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\Omega_{xx} = \frac{3}{4\sqrt{1-e^2}}, \quad \Omega_{xy} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1-2\mu}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \Omega_{yy} = \frac{9}{4\sqrt{1-e^2}}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{1-e^2}-1}{e}.$$

Решение будем определять в области, где все корни определяющего уравнения $|P^{(0)} - \lambda^{(0)}E| = 0$ (E — единичная матрица) являются чисто мнимыми, простыми и не отличаются друг от друга на $\pm pi$ (p — целое число, $i = \sqrt{-1}$).

Порождающее решение ищем в виде

$$x^{(0)} = x^{(00)} + \varepsilon x^{(01)} + \ldots . \tag{8}$$

Зная $x^{(0)}$, для $x^{(1)}$ имеем систему линейных неоднородных уравнений. Для получения общего решения этой системы достаточно найти частное решение неоднородной системы уравнений, а затем добавить общее решение однородной системы.

Будем искать частное решение для $x^{(1)}$ в виде

$$x^{(1)} = x^{(10)} + \varepsilon x^{(11)} + \ldots . \tag{9}$$

С принятой степенью точности определения решения уравнений в вариациях в (8) нужно определить $x^{(00)}$ и $x^{(01)}$, а в (9) только $x^{(10)}$.

Из (7), (8) и (9) для определения $x^{(00)}$, $x^{(01)}$ и $x^{(10)}$ получим уравнения:

$$x^{(00)\prime} = P^{(0)}x^{(00)},$$

$$x^{(01)\prime} = P^{(0)}x^{(01)} + P^{(1)}x^{(00)}\cos v,$$

$$x^{(10)\prime} = P^{(0)}x^{(10)} + Q^{(0)}x^{(00)} + q^{(0)\prime},$$

где для матриц Q и q использованы разложения

$$Q = Q^{(0)} + \varepsilon Q^{(1)}\cos v + \ldots,$$

$$q = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)}\cos v + \ldots,$$

$$Q^{(0)} = \frac{1}{2(1-e^2)^2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + 3\cos[2(1-n_s)v] & -3\sin[2(1-n_s)v] & 0 & 0 \\ -3\sin[2(1-n_s)v] & 1 - 3\cos[2(1-n_s)v] & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$q^{(0)} = \frac{1}{2(1-e^2)^2}\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha + 3\alpha\cos[2(1-n_s)v] - 3\beta\sin[2(1-n_s)v] \\ \beta - 3\beta\cos[2(1-n_s)v] - 3\alpha\sin[2(1-n_s)v] \end{Vmatrix}.$$

Здесь для простоты положено $\Omega_{s0} = 0$ и $\omega_s = u_{s_0} = 0$.

Проведя все вычисления, с принятой степенью точности решение получим в виде

$$x = x^{(00)} + \varepsilon x^{(01)} + \nu x^{(10)} = (X^{(0)} + \varepsilon X^{(1)} + \nu X^{(2)})' C + \nu y, \tag{10}$$

где $(\ )'$ — транспонированная матрица, C — матрица-столбец произвольных постоянных,

$$C=\begin{Vmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{Vmatrix},\quad X^{(j)}=\begin{Vmatrix} x_{11}^{(j)} & x_{12}^{(j)} & x_{13}^{(j)} & x_{14}^{(j)}\\ x_{21}^{(j)} & x_{22}^{(j)} & x_{23}^{(j)} & x_{24}^{(j)}\\ x_{31}^{(j)} & x_{32}^{(j)} & x_{33}^{(j)} & x_{34}^{(j)}\\ x_{41}^{(j)} & x_{42}^{(j)} & x_{43}^{(j)} & x_{44}^{(j)}\end{Vmatrix},\quad y=\begin{Vmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{Vmatrix},$$

$$x_{2k-1,1}^{(0)}=(\Lambda_k^2+\Omega_{yy})\cos\Lambda_k v,\quad x_{2k-1,2}^{(0)}=-(\Omega_{xy}\cos\Lambda_k v+2\Lambda_k\sin\Lambda_k v),$$

$$x_{2k,1}^{(0)}=(\Lambda_k^2+\Omega_{yy})\sin\Lambda_k v,\quad x_{2k,2}^{(0)}=2\Lambda_k\cos\Lambda_k v-\Omega_{xy}\sin\Lambda_k v,$$

$$x_{2k-1,1}^{(1)}=\sum_{l=-1}^{1}{}'\frac{1}{\Delta(\Lambda_k+l)}[-a(\Lambda_k+l)\cos(\Lambda_k+l)v+c(\Lambda_k+l)\sin(\Lambda_k+l)v],$$

$$x_{2k-1,2}^{(1)}=\sum_{l=-1}^{1}{}'\frac{1}{\Delta(\Lambda_k+l)}[b(\Lambda_k+l)\cos(\Lambda_k+l)v+d(\Lambda_k+l)\sin(\Lambda_k+l)v],$$

$$x_{2k,1}^{(1)}=\sum_{l=-1}^{1}{}'\frac{1}{\Delta(\Lambda_k+l)}[-c(\Lambda_k+l)\cos(\Lambda_k+l)v-a(\Lambda_k+l)\sin(\Lambda_k+l)v],$$

$$x_{2k,2}^{(1)}=\sum_{l=-1}^{1}{}'\frac{1}{\Delta(\Lambda_k+l)}[-d(\Lambda_k+l)\cos(\Lambda_k+l)v+b(\Lambda_k+l)\sin(\Lambda_k+l)v],$$

$$x_{2k-1,1}^{(2)}=\frac{\Omega_{xy}}{\Lambda_k(2\Lambda_k^2+\varphi)}\sin\Lambda_k v+\frac{(\Lambda_k^2+\Omega_{yy})(2\Lambda_k^2+\varphi+4)}{4\Lambda_k(2\Lambda_k^2+\varphi)}v\sin\Lambda_k v-$$

$$-\sum_{l=-1}^{1}{}'\frac{\Omega_{xx}}{\Delta(\omega_{kl})}\{[M_{kl}(\Omega_{yy}+L_{kl})-\Omega_{xy}^2]\cos\omega_{kl}v+l\Omega_{xy}(\Omega_{yy}+L_{kl}+M_{kl})\sin\omega_{kl}v\},$$

$$x_{2k-1,2}^{(2)}=\frac{\Omega_{yy}-\Omega_{xx}}{2\Lambda_k(2\Lambda_k^2+\varphi)}\sin\Lambda_k v+\frac{2\Lambda_k^2+\varphi+4}{2(2\Lambda_k^2+\varphi)}v\cos\Lambda_k v-$$

$$-\frac{\Omega_{xy}(2\Lambda_k^2+\varphi+4)}{4\Lambda_k(2\Lambda_k^2+\varphi)}v\sin\Lambda_k v+\sum_{l=-1}^{1}{}'\frac{\Omega_{xx}}{\Delta(\omega_{kl})}\{-\Omega_{xy}(\Omega_{xx}+L_{kl}-M_{kl})\cos\omega_{kl}v+$$

$$+l[M_{kl}(\Omega_{xx}+L_{kl})+\Omega_{xy}^2]\sin\omega_{kl}v\},$$

$$x_{2k,1}^{(2)}=\frac{(\Lambda_k^2+\Omega_{yy})(2\Lambda_k^2+\varphi+4)-8\Lambda_k^2}{4\Lambda_k^2(2\Lambda_k^2+\varphi)}\sin\Lambda_k v-$$

$$-\frac{(\Lambda_k^2+\Omega_{yy})(2\Delta_k^2+\varphi+4)}{4\Lambda_k(2\Lambda_k^2+\varphi)}v\cos\Lambda_k v+$$

$$+\sum_{l=-1}^{1}{}'\frac{\Omega_{xx}}{\Delta(\omega_{kl})}\{l\Omega_{xy}(\Omega_{yy}+L_{kl}+M_{kl})\cos\omega_{kl}v-[M_{kl}(\Omega_{yy}+L_{kl})-\Omega_{xy}^2]\sin\omega_{kl}v\},$$

$$x^{(2)}_{2k,2} = -\frac{\Omega_{xy}(2\Lambda_k^2+\varphi+4)}{4\Lambda_k^2(2\Lambda_k^2+\varphi)}\sin\Lambda_k v + \frac{\Omega_{xy}(2\Lambda_k^2+\varphi+4)}{2\Lambda_k(2\Lambda_k^2+\varphi)} v\cos\Lambda_k v +$$

$$+\frac{2\Lambda_k^2+\varphi+4}{2(2\Lambda_k^2+\varphi)} v\sin\Lambda_k v - \sum_{l=-1}^{1}{}' \frac{\Omega_{xx}}{\Delta(\omega_{kl})}\{l[M_{kl}(\Omega_{xx}+L_{kl})+\Omega_{xy}^2]\cos\omega_{kl}v +$$

$$+\Omega_{xy}(\Omega_{xx}+L_{kl}-M_{kl})\sin\omega_{kl}v\},$$

$$y_1 = -\frac{3}{2\Delta[2(1-n_s)]}\{[(\alpha\Omega_{yy}+\beta\Omega_{xy})+4\alpha(1-n_s)(2-n_s)]\times$$

$$\times\cos[2(1-n_s)v]+[(\alpha\Omega_{xy}-\beta\Omega_{yy})-4\beta(1-n_s)(2-n_s)]\sin[2(1-n_s)v]\},$$

$$y_2 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{3}{2\Delta[2(1-n_s)]}\{[(\alpha\Omega_{xy}+\beta\Omega_{xx})+4\beta(1-n_s)(2-n_s)]\times$$

$$\times\cos[2(1-n_s)v]-[(-\alpha\Omega_{xx}+\beta\Omega_{xy})-4\alpha(1-n_s)(2-n_s)]\sin[2(1-n_s)v]\}$$

$$x^{(j)}_{m3} = \frac{d}{dv}x^{(j)}_{m1},\quad x^{(j)}_{m4} = \frac{d}{dv}x^{(j)}_{m2},\quad y_3 = \frac{d}{dv}y_1,\quad y_4 = \frac{d}{dv}y_2,$$

$$\varphi = \Omega_{xx}+\Omega_{yy}-4,\quad \psi = \Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega_{xy}^2,$$

$$\Lambda_1 = \sqrt{-\frac{\varphi}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2-\psi}},\quad \Lambda_2 = \sqrt{-\frac{\varphi}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2-\psi}},$$

$$\Delta(\varkappa) = \varkappa^4+\varphi\varkappa^2+\psi,\quad \omega_{kl} = \Lambda_k+2l(1-n_s),$$

$$L_{kl} = \omega_{kl}(\omega_{kl}+2l),\quad M_{kl} = \Lambda_k^2+\Omega_{yy}-2l\Lambda_k,$$

$$a(\varkappa_k) = 4\Omega_{yy}\Lambda_k\varkappa_k+\psi(\Lambda_k^2+\Omega_{yy})+\varkappa_k^2(\psi+\Omega_{xx}\Lambda_k^2),$$

$$b(\varkappa_k) = \Omega_{xy}(4\Lambda_k\varkappa_k+\psi-\varkappa_2^2\Lambda_k^2),\quad c(\varkappa_k) = 2\Omega_{xy}\Lambda_k\varkappa_k(\varkappa_k-\Lambda_k),$$

$$d(\varkappa_k) = 2[\varkappa_k(\psi+\Omega_{xx}\Lambda_k^2)+\Lambda_k^2(\psi+\Omega_{yy}\varkappa_k^2)],$$

$$j = 0,1,2;\quad m = 1,2,3,4;\quad k = 1,2;$$

$\sum\limits_{l=-1}^{1}{}'$ означает, что при суммировании пропускается значение $l = 0$.

Произвольные постоянные определяются из:

$$C = [(X^{(0)}+\varepsilon X^{(1)}+\nu X^{(2)})'_{v=v_0}]^{-1}(x_0-\nu y_{v=v_0}),$$

где x_0 — начальные условия (при $v = v_0$).

Аналогичным образом ищем общее решение системы (6) в виде:

$$z = z^{(0)}+\nu z^{(1)}+\dots. \tag{11}$$

Произведя вычисления, получим общее решение системы (6) в виде

$$z = z^{(0)}+\nu z^{(1)} = (Z^{(0)}+\nu Z^{(1)})'C, \tag{12}$$

где

$$Z^{(0)} = \begin{Vmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{Vmatrix},\quad Z^{(1)} = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} v\sin v & \sin v+v\cos v \\ \sin v-v\cos v & v\sin v \end{Vmatrix},$$

C — матрица-столбец произвольных постоянных, которая может быть определена по начальным условиям.

§ 3. Движение вблизи треугольных лагранжевых решений системы Земля—Луна при учете возмущений от Солнца

В предыдущих параграфах в качестве малых параметров использовались величины: отношение расстояния между основными телами к расстоянию между возмущающим телом и центром масс основных тел $\frac{1}{\rho}\left(\text{или величина } \nu = \frac{\mu_s}{\rho^3}\right)$, эксцентриситет орбит основных тел e $\left(\text{или величина } \varepsilon \approx -\frac{e}{2}\right)$, наклонение плоскости орбиты возмущающего тела к плоскости орбиты основных тел i_s и эксцентриситет орбиты возмущающего тела e_s. Для системы Земля—Луна—Солнце, где Солнце рассматривается как возмущающее тело, эти величины имеют значения [3]: $\frac{1}{\rho} = 0{,}00256059$, $\nu = 0{,}00553033$, $e = 0{,}054900489$, $\varepsilon = -0{,}027470960$, $i_s = 5°8'43'',427 = 0{,}08980$, $e_s = 0{,}01678$.

Используя эти значения постоянных, а также $\mu = 0{,}012116806$, для элементов матриц решения (10) получим следующие значения:

$$x_{11}^{(0)} = 2{,}3428 \cos \Lambda_1 v, \quad x_{12}^{(0)} = -1{,}2695 \cos \Lambda_1 v - 0{,}5982 \sin \Lambda_1 v,$$

$$x_{13}^{(0)} = -0{,}7007 \sin \Lambda_1 v, \quad x_{14}^{(0)} = -0{,}1789 \cos \Lambda_1 v + 1{,}3797 \sin \Lambda_1 v,$$

$$x_{31}^{(0)} = 3{,}1594 \cos \Lambda_2 v, \quad x_{32}^{(0)} = -1{,}2695 \cos \Lambda_2 v - 1{,}9037 \sin \Lambda_2 v,$$

$$x_{33}^{(0)} = -3{,}0073 \sin \Lambda_2 v, \quad x_{34}^{(0)} = -1{,}8120 \cos \Lambda_2 v + 1{,}2083 \sin \Lambda_2 v,$$

$$x_{11}^{(1)} = -3{,}1553 \cos (\Lambda_1 + 1) v + 0{,}7897 \sin (\Lambda_1 + 1) v - $$
$$- 9{,}7616 \cos (\Lambda_1 - 1) v - 3{,}1936 \sin (\Lambda_1 - 1) v,$$

$$x_{12}^{(1)} = 1{,}5084 \cos (\Lambda_1 + 1) v + 2{,}1682 \sin (\Lambda_1 + 1) v +$$
$$+ 6{,}1047 \cos (\Lambda_1 - 1) v - 3{,}0175 \sin (\Lambda_1 - 1) v,$$

$$x_{13}^{(1)} = 1{,}0259 \cos (\Lambda_1 + 1) v + 4{,}0998 \sin (\Lambda_1 + 1) v +$$
$$+ 2{,}2385 \cos (\Lambda_1 - 1) v - 6{,}8421 \sin (\Lambda_1 - 1) v,$$

$$x_{14}^{(1)} = 2{,}8167 \cos (\Lambda_1 + 1) v - 1{,}9595 \sin (\Lambda_1 + 1) v +$$
$$+ 2{,}1150 \cos (\Lambda_1 - 1) v + 4{,}2789 \sin (\Lambda_1 - 1) v,$$

$$x_{31}^{(1)} = -1{,}8425 \cos (\Lambda_2 + 1) v + 0{,}4367 \sin (\Lambda_2 + 1) v +$$
$$+ 1{,}9722 \cos (\Lambda_2 - 1) v + 1{,}4778 \sin (\Lambda_2 - 1) v,$$

$$x_{32}^{(1)} = 0{,}4772 \cos (\Lambda_2 + 1) v + 1{,}8024 \sin (\Lambda_2 + 1) v -$$
$$- 1{,}6829 \cos (\Lambda_2 - 1) v + 1{,}1543 \sin (\Lambda_2 - 1) v,$$

$$x_{33}^{(1)} = 0{,}8523 \cos (\Lambda_2 + 1) v + 3{,}5962 \sin (\Lambda_2 + 1) v -$$
$$- 0{,}0711 \cos (\Lambda_2 - 1) v + 0{,}0950 \sin (\Lambda_2 - 1) v,$$

$$x_{34}^{(1)} = 3{,}5180 \cos (\Lambda_2 + 1) v - 0{,}9314 \sin (\Lambda_2 + 1) v -$$
$$- 0{,}0556 \cos (\Lambda_2 - 1) v - 0{,}0810 \sin (\Lambda_2 - 1) v,$$

$$y_1 = -1{,}0120 \cos \omega v + 1{,}3381 \sin \omega v,$$
$$y_2 = 1{,}3270 \cos \omega v + 0{,}4894 \sin \omega v - 0{,}1924,$$
$$y_3 = 2{,}4771 \cos \omega v + 1{,}8734 \sin \omega v, \quad y_4 = 0{,}9060 \cos \omega v - 2{,}4566 \sin \omega v,$$
$$\Lambda_1 = 0{,}2991, \ \Lambda_2 = 0{,}9518, \ \omega = 2(1 - n_s) = 1{,}8513,$$
$$\omega_{1,1} = 2{,}1503, \ \omega_{1,-1} = -1{,}5522, \ \omega_{2,1} = 2{,}8031, \ \omega_{2,-1} = -0{,}8994.$$

По элементу $x^{(i)}_{2k-1,j} = \sum\limits_n (a_n \cos \omega_n v + b_n \sin \omega_n v)$, $(i, k = 1, 2; \ j = 1, 2, 3, 4)$ легко определяется элемент $x^{(i)}_{2k,j}$:

$$x^{(i)}_{2k,j} = \sum_n (-b_n \cos \omega_n v + a_n \sin \omega_n v). \tag{13}$$

Элементы матрицы $X^{(2)}$ приведены в таблице.

Элемент	Коэффициент при								k
	$\cos \Lambda_k v$	$\sin \Lambda_k v$	$v \cos \Lambda_k v$	$v \sin \Lambda_k v$	$\cos \omega_{k,1} v$	$\sin \omega_{k,1} v$	$\cos \omega_{k,-1} v$	$\sin \omega_{k,-1} v$	
$x^{(2)}_{11}$	0	−5,1981	0	−7,6348	−0,7971	−0,7309	−4,5730	2,9279	1
$x^{(2)}_{12}$	0	−3,0756	−1,9493	4,1369	−0,4486	0,8239	−0,9088	−4,3156	1
$x^{(2)}_{13}$	−1,5546	−7,6348	−2,2834	0	−1,5717	1,7140	−4,5446	−7,0981	1
$x^{(2)}_{14}$	−2,8691	4,1369	1,2373	0,5830	1,7717	0,9646	6,6986	−1,4107	1
$x^{(2)}_{21}$	0	−23,0785	7,6348	0	0,7309	−0,7971	−2,9279	−4,5730	1
$x^{(2)}_{22}$	0	13,8322	−4,1369	−1,9493	−0,8239	−0,4486	4,3156	−0,9088	1
$x^{(2)}_{23}$	0,7325	0	0	−2,2834	−1,7140	−1,5717	7,0981	−4,5446	1
$x^{(2)}_{24}$	0	−1,9493	−0,5830	1,2373	−0,9646	1,7717	1,4107	6,6986	1
$x^{(2)}_{31}$	0	1,6333	0	4,8946	−0,2521	−0,2997	247,3695	−135,4937	2
$x^{(2)}_{32}$	0	0,9664	2,9493	−1,9667	−0,2288	0,2707	−23,2670	200,2316	2
$x^{(2)}_{33}$	1,5546	4,8946	4,6590	0	−0,8401	0,7067	121,8652	222,4882	2
$x^{(2)}_{34}$	3,8691	−1,9667	−1,8720	−2,8073	0,7588	0,6415	−180,0915	−20,9268	2
$x^{(2)}_{41}$	0	2,6930	−4,8946	0	0,2997	−0,2521	135,4937	247,3695	2
$x^{(2)}_{42}$	0	−2,0662	1,9667	2,9493	−0,2707	−0,2288	−200,2316	−23,2670	2
$x^{(2)}_{43}$	−2,3313	0	0	4,6590	−0,7067	−0,8401	−222,4882	121,8652	2
$x^{(2)}_{44}$	0	2,9493	2,8073	−1,8720	−0,6415	0,7588	20,9268	−180,0915	2

Оценка членов более высоких степеней относительно малых параметров показывает, что любой из них (за исключением двух) не превышает $1 \div 2\%$ нулевого приближения $X^{(0)}$. Следовательно, учитывать эти члены нецелесообразно, ибо точность получаемого решения практически не изменяется, а аналитическая структура решения становится на много сложнее. Упомянутые, как исключение, два члена имеют достаточно большие коэффициенты и потому их учет обязателен. Эти члены учитываются путем введения в решение (10) матриц $X^{(3)}$ и $X^{(4)}$:

$$x = (X^{(0)} + \varepsilon X^{(1)} + \nu X^{(2)} + \nu^2 X^{(3)} + \nu\varepsilon X^{(4)})' C + \nu y. \tag{14}$$

Для системы Земля—Луна—Солнце элементы матриц $X^{(3)}$ и $X^{(4)}$ имеют вид:

$$x_{31}^{(3)} = 8213{,}11 \cos \omega_{2,-1}v - 4490{,}55 \sin \omega_{2,-1}v, \quad x_{32}^{(3)} = -763{,}12 \cos \omega_{2,-1}v + $$
$$+ 6653{,}24 \sin \omega_{2,-1}v, \quad x_{33}^{(3)} = 4038{,}85 \cos \omega_{2,-1}v + 7387{,}01 \sin \omega_{2,-1}v,$$
$$x_{34}^{(3)} = -5984{,}03 \cos \omega_{2,-1}v - 686{,}36 \sin \omega_{2,-1}v, \quad x_{31}^{(4)} = 485{,}94 \cos(\omega_{2,-1}+1)v -$$
$$-607{,}64 \sin(\omega_{2,-1}+1)v, \quad x_{32}^{(4)} = -442{,}10 \cos(\omega_{2,-1}+1)v + 174{,}25 \sin(\omega_{2,-1}+1)v,$$
$$x_{33}^{(4)} = -61{,}12 \cos(\omega_{2,-1}+1)v - 48{,}88 \sin(\omega_{2,-1}+1)v,$$
$$x_{34}^{(4)} = 17{,}53 \cos(\omega_{2,-1}+1)v + 44{,}47 \sin(\omega_{2,-1}+1)v,$$

элементы $x_{41}^{(i)}$, $x_{42}^{(i)}$, $x_{43}^{(i)}$, $x_{44}^{(i)}$ ($i = 3;\ 4$) определяются по правилу (13), остальные элементы матриц $X^{(3)}$ и $X^{(4)}$ равны нулю.

На рис. 1 представлены результаты вычислений по формуле (14) и результаты численного интегрирования полной системы уравнений (2) (при $e_s = 0$) методом Рунге—Кутта с переменным шагом, проведенного на электронной вычислительной машине. Начальные условия — нулевые, т. е. при $v = 0$ $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. На рис. 2 приведены результаты аналогичных вычислений для $e = 0$ ($\varepsilon = 0$) и $e_s = 0$, т. е. для дважды круговой дважды ограниченной задачи четырех тел.

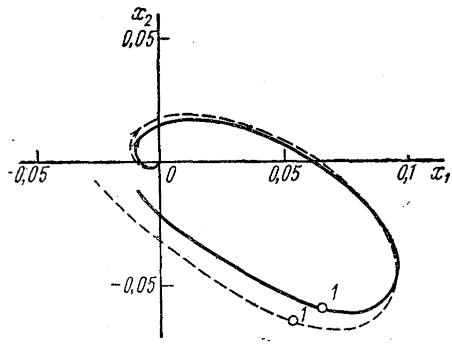

Рис. 1. Траектории движения при $e \neq 0$, $e_s = 0$

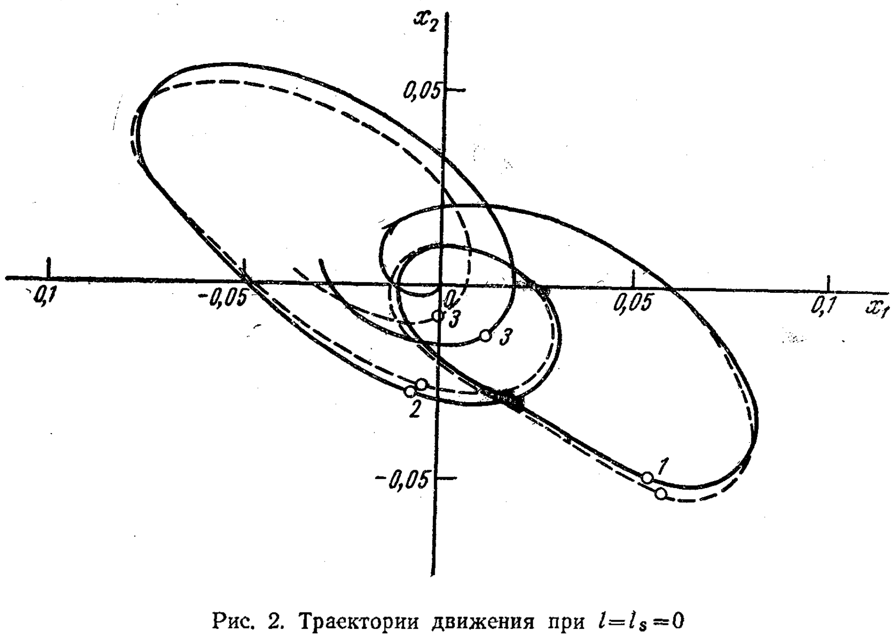

Рис. 2. Траектории движения при $l = l_s = 0$

Теоретические результаты хорошо согласуются с результатами численного интегрирования на интервале времени до 1—1,5 лунных месяца для эллиптическо-круговой ($e \neq 0$, $e_s = 0$) и до 2,5—3 месяца для дважды круговой ($e=e_s=0$) дважды ограниченной задачи четырех тел. Для больших интервалов времени согласование результатов менее уверенное, что объясняется главным образом неучетом нелинейных членов в решении (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
3. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
8.12 1967 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии