Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1969

УДК 521.6

В. Н. КИРЮШЕНКОВ

ОРБИТЫ С МАЛЫМИ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТАМИ И НАКЛОННОСТЯМИ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

Получена связь между оскулирующими элементами и элементами, которые используются в известной промежуточной орбите, основанной на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров. Предполагается, что эксцентриситеты и наклонности являются малыми величинами. Приводятся графики зависимости оскулирующих элементов от некоторой величины, линейно связанной со временем.

Задача двух неподвижных центров примечательна тем, что она полностью интегрируется в квадратурах. Сравнительно недавно было выяснено, что задача о движении спутника в гравитационном поле Земли (или вообще в поле притяжения планеты) может быть рассматриваема с большой степенью приближения, как задача о движении материальной точки, притягиваемой двумя соответствующим образом подобранными неподвижными точечными массами [1—3]. Для сжатой планеты массы неподвижных центров нужно выбирать комплексно сопряженными и располагать их на мнимом расстоянии друг от друга. Такая конфигурация неподвижных центров приводит нас к обобщенной задаче двух неподвижных центров.

В настоящей работе получена связь между двумя системами элементов, определяющих движение материальной точки в обобщенной задаче двух неподвижных центров.

Одна система элементов — оскулирующая, она более универсальна, но неудобна для рассматриваемой задачи, другая — специальная система элементов, которая применяется только для обобщенной задачи двух неподвижных центров, гораздо удобнее.

§ 1. Уравнения, связывающие две системы элементов

Два неподвижных центра, имеющие массы $\frac{1}{2}m(1+i\sigma)$ и $\frac{1}{2}m(1-i\sigma)$, находятся на расстоянии $2ic$ друг от друга. Здесь m обозначает сумму масс неподвижных центров, $i=\sqrt{-1}$, а c и σ — некоторые постоянные, которые будем считать малыми величинами.

Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат с началом в центре масс и осью z, проходящей через неподвижные центры. Дифференциальные уравнения движения материальной точки, притягиваемой по закону Ньютона двумя неподвижными центрами, напишутся в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial W}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial W}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial W}{\partial z},$$

где $W=\frac{fm}{2}\left\{\frac{1+i\sigma}{r_1}+\frac{1-i\sigma}{r_2}\right\}$ есть силовая функция задачи, f обозначает постоянную тяготения, а

$$r_1=\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma+i)]^2},\quad r_2=\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma-i)]^2}.$$

Разложим силовую функцию в ряд по полиномам Лежандра и представим ее в таком виде:

$$W=W_0+W_1,$$

где

$$W_0=\frac{fm}{r}, \tag{1}$$

$$W_1=\frac{fm}{r}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k}{r^k}P_k\left(\frac{z}{r}\right). \tag{2}$$

Здесь $P_k\left(\frac{z}{r}\right)$— полином Лежандра k-того порядка, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и

$$\gamma_k=\frac{1}{2}ic^k(1+\sigma^2)\left[(\sigma+i)^{k-1}-(\sigma-i)^{k-1}\right].$$

Нетрудно проверить, что все коэффициенты γ_k действительны.

Движение материальной точки в обобщенной задаче двух неподвижных центров удобно описывать следующими элементами [3]:

$$a,\ e,\ s,\ l,\ g,\ h. \tag{3}$$

Элементы a, e, s являются постоянными величинами, а элементы l, g, h зависят от времени t следующим образом:

$$l=\frac{(fm)^{1/2}}{a^{3/2}}\left\{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2-s^2)-\frac{9}{8}\varepsilon^4\right\}(t-t_0)+l_0, \tag{4}$$

$$g=\left\{3\varepsilon^2+3\varepsilon^2\sigma^2-\frac{15}{4}\varepsilon^2s^2+\frac{9}{2}\varepsilon^4\right\}(l-l_0)+g_0, \tag{5}$$

$$h=\left\{-\frac{3}{2}\varepsilon^2-\frac{3}{2}\varepsilon^2\sigma^2-\frac{9}{8}\varepsilon^4+\frac{3}{4}\varepsilon^2s^2\right\}(l-l_0)+h_0, \tag{6}$$

где l_0, g_0, h_0 — значения соответствующих элементов в начальный момент времени t_0, а $\varepsilon=\frac{c}{a(1-e^2)}$. В данной работе предполагается, что ε, e и s являются малыми величинами. Выражения (4) — (6) написаны с точностью до четвертого порядка включительно относительно малых величин.

С другой стороны, движение материальной точки в обобщенной задаче двух неподвижных центров можно описывать кеплеровскими оскулирующими элементами:

$$a_k,\ e_k,\ s_k=\sin i_k,\ M=\frac{(fm)^{1/2}}{a_k^{3/2}}(t-t_0)+M_0,\ \omega,\ \Omega. \tag{7}$$

Здесь a_k — большая полуось, e_k — эксцентриситет, i_k — наклон орбиты к плоскости xOy, M_0 — средняя аномалия в начальный момент, ω — угловое расстояние перицентра от узла и Ω — долгота восходящего узла. Одна часть силовой функции (1) определяет кеплеровские элементы, а другая часть (2) возмущает эти элементы, заставляя их непрерывно изменяться со временем.

Нужно найти соотношения, связывающие системы элементов (3) и (7). Для большей простоты будем использовать конические координаты (радиус-вектор r, координату z и долготу ω, отсчитываемую в плоскости xOy от оси x). Шесть уравнений, связывающих две системы элементов, являются трансцендентными и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
r(a_k, e_k, M) &= r(a, e, s, l, g \mid \varepsilon, \sigma),\\
z(a_k, e_k, s_k, M, \omega) &= z(a, e, s, l, g \mid \varepsilon, \sigma),\\
w(e_k, s_k, M, \omega, \Omega) &= w(e, s, l, g, h \mid \varepsilon, \sigma),\\
\dot r(a_k, e_k, M) &= \dot r(a, e, s, l, g \mid \varepsilon, \sigma),\\
\dot z(a_k, e_k, s_k, M, \omega) &= \dot z(a, e, s, l, g \mid \varepsilon, \sigma),\\
\dot w(a_k, e_k, s_k, M, \omega) &= \dot w(a, e, s, l, g \mid \varepsilon, \sigma).
\end{aligned} \tag{8}$$

§ 2. Решение уравнений связи

Левые части уравнений связи (8) представим в виде степенных рядов по эксцентриситету e_k и синусу наклонности s_k, которые в данной работе являются малыми величинами [4], а правые части уравнений представим степенными рядами по малым величинам e, s, ε и σ [5]. Решение этих уравнений относительно оскулирующих кеплеровских элементов содержит малые делители вида $\frac{1}{e}$ и $\frac{1}{s}$, поэтому преобразуем элементы (3) и (7) к более удобным.

Вместо кеплеровских оскулирующих элементов введем следующие:

$$\begin{aligned}
&a_k, \ \lambda_k = M + \omega + \Omega,\\
&q_k = e_k \cos(\omega + \Omega), \ k_k = e_k \sin(\omega + \Omega),\\
&u_k = s_k \cos\Omega, \ v_k = s_k \sin\Omega
\end{aligned} \tag{9}$$

и аналогично вместо системы элементов (3):

$$\begin{aligned}
&a, \ \lambda = l + g + h,\\
&q = e\cos(g + h), \ k = e\cos(g + h),\\
&u = s\cos h, \ v = s\sin h.
\end{aligned} \tag{10}$$

Тогда уравнения (8) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
r(a_k, \lambda_k, q_k, k_k) &= r(a, \lambda, q, k, u, v \mid \varepsilon, \sigma),\\
z(a_k, \lambda_k, q_k, k_k, u_k, v_k) &= z(a, \lambda, q, k, u, v \mid \varepsilon, \sigma),\\
w(\lambda_k, q_k, k_k, u_k, v_k) &= w(\lambda, q, k, u, v) \mid \varepsilon, \sigma),\\
\dot r(a_k, \lambda_k, q_k, k_k) &= \dot r(a, \lambda, q, k, u, v \mid \varepsilon, \sigma),\\
\dot z(a_k, \lambda_k, q_k, k_k, u_k, v_k) &= \dot z(a, \lambda, q, k, u, v \mid \varepsilon, \sigma),\\
\dot w(a_k, \lambda_k, q_k, k_k, u_k, v_k) &= \dot w(a, \lambda, q, k, u, v \mid \varepsilon, \sigma).
\end{aligned} \tag{11}$$

Левые и правые части системы уравнений (11) являются степенными рядами относительно малых величин:

$$q_k,\ k_k,\ u_k,\ v_k,\ q,\ k,\ u,\ v,\ \varepsilon,\ \sigma. \tag{12}$$

При помощи простых линейных комбинаций эти шесть уравнений можно привести к шести уравнениям такого вида:

$$Э_k^{(i)} = Э^{(i)} + \varepsilon^2 F(a_k,\ \lambda_k,\ q_k,\ k_k,\ u_k,\ v_k \,|\, a,\ \lambda,\ q,\ k,\ u,\ v \,|\, \varepsilon,\ \sigma), \tag{13}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

где $Э_k^{(i)}$ обозначает какой-либо из оскулирующих элементов (9), а $Э^{(i)}$ обозначает соответствующий ему элемент из системы элементов (10).

Способом последовательных приближений можно получить решение уравнений (13) с любой степенью точности относительно малых величин (12). Ниже приводится решение этих уравнений с точностью до четвертой степени включительно относительно малых величин.

$$\begin{aligned}
q_k = q &+ \frac{3}{2}\varepsilon^2\cos\lambda + \varepsilon^2 q\left[-\frac{7}{4} + \frac{9}{4}\cos 2\lambda\right] + \frac{9}{4}\varepsilon^2 k\sin 2\lambda + \varepsilon\sigma v + \\
&+ \frac{3}{8}\varepsilon^4\cos\lambda + \frac{3}{2}\varepsilon^2\sigma^2\cos\lambda + \varepsilon^2 q^2\left[-\frac{45}{16}\cos\lambda + \frac{53}{16}\cos 3\lambda\right] + \\
&+ \varepsilon^2 k^2\left[\frac{21}{16}\cos\lambda - \frac{53}{16}\cos 3\lambda\right] + \varepsilon^2 u^2\left[-\frac{15}{8}\cos\lambda + \frac{7}{8}\cos 3\lambda\right] + \\
&+ \varepsilon^2 v^2\left[-\frac{21}{8}\cos\lambda - \frac{7}{8}\cos 3\lambda\right] + \varepsilon^2 qk\left[-\frac{33}{8}\sin\lambda + \frac{53}{8}\sin 3\lambda\right] + \\
&+ \varepsilon^2 uv\left[\frac{3}{4}\sin\lambda + \frac{7}{4}\sin 3\lambda\right];
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
k_k = k &+ \frac{3}{2}\varepsilon^2\sin\lambda + \varepsilon^2 k\left[-\frac{7}{4} - \frac{9}{4}\cos 2\lambda\right] + \frac{9}{4}\varepsilon^2 q\sin 2\lambda - \varepsilon\sigma u + \\
&+ \frac{3}{8}\varepsilon^4\sin\lambda + \frac{3}{2}\varepsilon^2\sigma^2\sin\lambda + \varepsilon^2 q^2\left[\frac{21}{16}\sin\lambda + \frac{53}{16}\sin 3\lambda\right] + \\
&+ \varepsilon^2 k^2\left[-\frac{45}{16}\sin\lambda - \frac{53}{16}\sin 3\lambda\right] + \varepsilon^2 u^2\left[-\frac{21}{8}\sin\lambda + \frac{7}{8}\sin 3\lambda\right] + \\
&+ \varepsilon^2 v^2\left[-\frac{15}{8}\sin\lambda - \frac{7}{8}\sin 3\lambda\right] + \varepsilon^2 qk\left[-\frac{33}{8}\cos\lambda - \frac{53}{8}\cos 3\lambda\right] + \\
&+ \varepsilon^2 uv\left[\frac{3}{4}\cos\lambda - \frac{7}{4}\cos 3\lambda\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_k = u &+ \varepsilon^2 u\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2\lambda\right] + \frac{3}{4}\varepsilon^2 v\sin 2\lambda + \varepsilon\sigma k + 3\varepsilon^3\sigma\sin\lambda + \\
&+ \varepsilon^2 ku\left[\frac{3}{4}\sin\lambda + \frac{7}{4}\sin 3\lambda\right] + \varepsilon^2 qv\left[\frac{15}{4}\sin\lambda + \frac{7}{4}\sin 3\lambda\right] + \\
&+ \varepsilon^2 qu\left[-\frac{3}{4}\cos\lambda + \frac{7}{4}\cos 3\lambda\right] + \varepsilon^2 kv\left[-\frac{21}{4}\cos\lambda - \frac{7}{4}\cos 3\lambda\right];
\end{aligned}$$

$$v_k = v + \frac{3}{4}\varepsilon^2 u\sin 2\lambda + \varepsilon^2 v\left[\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos 2\lambda\right] - \varepsilon\sigma q - 3\varepsilon^3\sigma\cos\lambda +$$

$$+\varepsilon^2 ku\left[\frac{15}{4}\cos\lambda-\frac{7}{4}\cos 3\lambda\right]+\varepsilon^2 qv\left[\frac{3}{4}\cos\lambda-\frac{7}{4}\cos 3\lambda\right]+$$
$$+\varepsilon^2 qu\left[-\frac{21}{4}\sin\lambda+\frac{7}{4}\sin 3\lambda\right]+\varepsilon^2 kv\left[-\frac{3}{4}\sin\lambda-\frac{7}{4}\sin 3\lambda\right];$$
$$\frac{a_k}{a}=1+2\varepsilon^2+3\varepsilon^2 q\cos\lambda+3\varepsilon^2 k\sin\lambda+\frac{13}{4}\varepsilon^4+\varepsilon^2\sigma^2+$$
$$+\varepsilon^2 q^2\left[-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\cos 2\lambda\right]+\varepsilon^2 k^2\left[-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\cos 2\lambda\right]+$$
$$+\varepsilon^2 u^2\left[-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos 2\lambda\right]+\varepsilon^2 v^2\left[-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cos 2\lambda\right]+9\varepsilon^2 qk\sin 2\lambda+3\varepsilon^2 uv\sin 2\lambda;$$
$$\lambda_k=\lambda+\frac{21}{4}\varepsilon^2 q\sin\lambda-\frac{21}{4}\varepsilon^2 k\cos\lambda+\frac{2}{2}\varepsilon^2 q^2\sin 2\lambda-$$
$$-\frac{9}{2}\varepsilon^2 k^2\sin 2\lambda-9\varepsilon^2 qk\cos 2\lambda+\frac{9}{2}\varepsilon^2 u^2\sin 2\lambda-$$
$$-\frac{3}{2}\varepsilon^2 v^2\sin 2\lambda-3\varepsilon^2 uv\cos 2\lambda-2\varepsilon\sigma qu-2\varepsilon\sigma kv. \qquad (14)$$

Из полученных соотношений нетрудно выразить элементы (10) через оскулирующие элементы (9).

§ 3. Зависимость кеплеровских оскулирующих элементов от времени

Из соотношений (9) имеем

$$e_k=\sqrt{q_k^2+k_k^2},\quad \omega+\Omega=\operatorname{arctg}\frac{k_k}{q_k},$$
$$s_k=\sqrt{u_k^2+v_k^2},\quad \Omega=\operatorname{arctg}\frac{v_k}{u_k}.$$

Если в формулах (14) учитывать только самые влиятельные члены, то получим

$$\frac{a_k}{a}=1+2\varepsilon^2+3\varepsilon^2 e\cos l, \qquad (15)$$
$$\lambda_k=\lambda+\frac{21}{4}\varepsilon^2 e\sin l, \qquad (16)$$
$$e_k=\sqrt{e^2+\frac{9}{4}\varepsilon^4+3\varepsilon^2 e\cos l}, \qquad (17)$$
$$s_k=\sqrt{s^2+\varepsilon^2\sigma^2 e^2+2\varepsilon\sigma es\sin g}, \qquad (17'')$$
$$\omega+\Omega=g+h+\Delta\pi,\quad \Omega=h+\Delta\Omega,$$

где

$$\Delta\pi=\operatorname{arctg}\frac{\sin l}{\frac{2}{3}\frac{e}{\varepsilon^2}+\cos l}, \qquad (18)$$
$$\Delta\Omega=\operatorname{arctg}\frac{-\cos g}{\frac{s}{\varepsilon\sigma e}+\sin g}. \qquad (18'')$$

Напомним, что a, e, s, ε, σ являются постоянными величинами, а l, g, h линейно связаны со временем, как показано в формулах

(4)—(6). Будем называть λ, $g+h$ и h соответственно вековыми возмущениями средней долготы в орбите, долготы перицентра и долготы восходящего узла, а все остальные члены в вышенаписанных формулах — периодическими возмущениями.

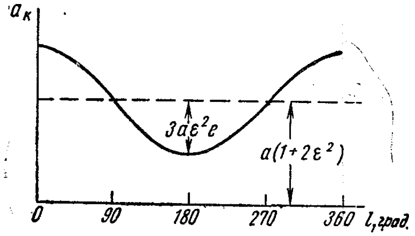

Рис. 1. Возмущение оскулирующей большой полуоси

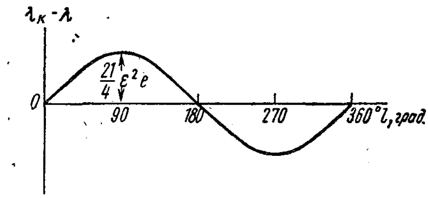

Рис. 2. Периодическое возмущение оскулирующей средней долготы в орбите

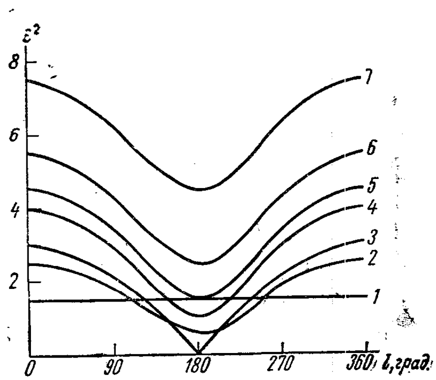

Рис. 3. Возмущение оскулирующего эксцентриситета: *1* — $e=0$, *2* — $e=\varepsilon^2$, *3* — $e=3/2\ \varepsilon^2$, *4* — $e=5/2\ \varepsilon^2$, *5* — $e=3\ \varepsilon^2$, *6* — $e=4\ \varepsilon^2$, *7* — $e=6\ \varepsilon^2$

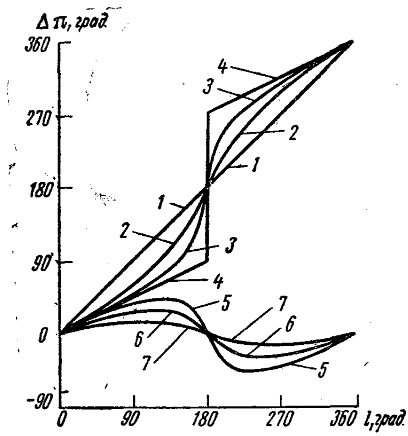

Рис. 4. Периодическое возмущение оскулирующей долготы перицентра: *1* — $e=0$, *2* — $e=3/4\ \varepsilon^2$, *3* — $e=5/4\ \varepsilon^2$, *4* — $e=3/2\ \varepsilon^2$, *5* — $e=2\ \varepsilon^2$, *6* — $e=3\ \varepsilon^2$, *7* — $e=6\ \varepsilon^2$

На рисунках представлены графически формулы (15)—(18) (т. е. самые значительные периодические возмущения оскулирующих элементов). Постоянные e и s используются в качестве параметров. Рисунки для формул (17″) и (18″) аналогичны рисункам для формул соответственно (17) и (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
2. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8. М., Изд-во АН СССР, 1961, стр. 64.
3. Аксенов Е. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 1967.
4. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.
5. Кирюшенков В. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 1968.

Поступила в редакцию
1.4 1968 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии