

В. П. ДОЛГАЧЕВ

## СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ДАЛЕКИХ ИСЗ С НАБЛЮДЕНИЯМИ

Проводится сравнение результатов расчетов по полученным автором формулам с результатами численного интегрирования и наблюдениями конкретных ИСЗ.

Полученные ранее аналитические выражения для вековых и долгопериодических возмущений орбит далеких ИСЗ [1] используются для расчета возмущений некоторых реальных ИСЗ, результаты наблюдений которых обработаны и опубликованы.

Кроме того, результаты расчетов по аналитическим зависимостям сравниваются с результатами численного интегрирования уравнений движения спутника в поле притяжения Луны.

### § 1. Постановка задачи

При движении далеких ИСЗ главные возмущения вызываются несферичностью Земли и притяжением Луны и Солнца. Так как влияние несферичности Земли на движение спутника изучено достаточно подробно, в данной работе рассматривается возмущающее действие Луны и Солнца, которые считаются материальными точками, движущимися по эллиптическим орбитам. Ввиду того что в дальнейшем будет проводиться сравнение результатов расчета по полученным ранее формулам с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений движения, а полученные выражения для возмущений являются возмущениями первого порядка, то достаточно рассмотреть возмущающее влияние какого-либо одного тела.

Для определенности за возмущающее тело принимаем Луну. Пусть *Oxyz* — прямоугольная экваториальная неподвижная система координат с началом в центре инерции Земли, ось *Ox* которой направлена в точку весеннего равноденствия, ось *Oz* по оси вращения Земли, а *Oy* дополняет систему до правой. Тогда дифференциальные уравнения движения спутника в рассматриваемом поле сил имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3} - \mu_L \left( \frac{x_L - x}{\Delta^3} - \frac{x_L}{r_L^3} \right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3} - \mu_L \left( \frac{y_L - y}{\Delta^3} - \frac{y_L}{r_L^3} \right), \quad (1)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3} - \mu_L \left( \frac{z_L - z}{\Delta^3} - \frac{z_L}{r_L^3} \right),$$

где  $\mu = fm_E$ ,  $\mu_L = fm_L$ ,  $f$  — постоянная тяготения,  $m_E$  — масса Земли,  $m_L$  — масса Луны,  $x, y, z, x_L, y_L, z_L$  — координаты спутника и Луны соответственно,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  и  $\Delta^2 = (x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2$ .

Система (1) с заданными начальными условиями интегрировалась на ЭВМ способом Рунге—Кутты с точностью до четвертой степени шага. Шаг интегрирования выбирался автоматически по методу, предложенному В. А. Егоровым в 1953 г. Интегрирование проводилось на интервале времени, соответствующем двум оборотам Луны, что составляет около 64 оборотов спутника. Значения постоянных, входящих в (1), следующие (единица длины — км, единица времени — сек):  $\mu = 398620$  и  $\mu_L = 4889$ .

Начальные значения координат и составляющих скорости Луны взяты для 1/III 1960 г.

$$x_L^{(0)} = -341358,58; \quad y_L^{(0)} = 199024,27;$$

$$z_L^{(0)} = 80363,89; \quad \dot{x}_L^{(0)} = -0,50141736;$$

$$\dot{y}_L^{(0)} = 0,80299933; \quad \dot{z}_L^{(0)} = -0,25048302.$$

Расчеты проводились для спутника со следующими экваториальными элементами:  $a = 38142$  км,  $e = 2/3$ ,  $i = 34^\circ 36'$ ,  $\omega = 71^\circ 46' 28''$ ,  $\Omega = 119^\circ 51' 25''$ ,  $u = 26^\circ 46' 40''$ .

По этим начальным значениям элементов находились экваториальные координаты и составляющие скорости спутника, которые вместе с  $x_L^{(0)}, y_L^{(0)}, z_L^{(0)}, \dot{x}_L^{(0)}, \dot{y}_L^{(0)}, \dot{z}_L^{(0)}$  принимались за начальные условия при интегрировании системы (1).

Через интервалы времени  $\Delta t = \frac{P}{4}$ , где  $P$  — начальное значение периода обращения спутника, по известным формулам задачи двух тел вычислялись значения кеплеровских оскулирующих экваториальных элементов спутника.

Вместе с этим по ранее полученным [1] формулам для возмущений для тех же моментов времени вычислялись возмущенные значения элементов.

Следует отметить, что в формулах для возмущений элементы отнесены к плоскости орбиты Луны, тогда как посредством численного интегрирования мы получаем экваториальные элементы. Переход от экваториальных элементов  $i, \Omega, \omega$  к луноорбитальным  $i_1, \Omega_1, \omega_1$  при известных экваториальных элементах Луны  $i_L, \Omega_L, \omega_L$  осуществляется по формулам:

$$\cos i_1 = \cos i \cos i_L + \sin i \sin i_L \cos(\Omega - \Omega_L),$$

$$\sin \Omega_1^* = \frac{\sin i \sin(\Omega - \Omega_L)}{\sin i_1},$$

$$\cos \Omega_1^* = \frac{\cos i_L \cos i_1 - \cos i}{\sin i_L \sin i_1},$$

$$\Omega_1 = \Omega_1^* - \omega_L, \quad (2)$$

$$\sin(\omega - \omega_1) = \frac{\sin i_L - \cos i_1 \cos i}{\sin i},$$

$$\cos(\omega - \omega_1) = \frac{\cos i_L - \cos i_1 \cos i}{\sin i_1 \sin i}.$$

Экваториальные элементы  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  при известных луноорбитальных элементах  $i_1$ ,  $\Omega_1$ ,  $\omega_1$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Omega_1^* &= \Omega_1 + \omega_L, \\ \cos i &= \cos i_L \cos i_1 - \sin i_L \sin i_1 \cos \Omega_1^*, \\ \sin \Omega &= \frac{\sin i_1 \sin \Omega_1^*}{\sin i}, \\ \cos \Omega &= \frac{\cos i_1 - \cos i \cos i_L}{\sin i \sin i_L}, \\ \sin(\omega - \omega_1) &= \frac{\sin i_L \sin \Omega_1^*}{\sin i}, \\ \cos(\omega - \omega_1) &= \frac{\cos i_L - \cos i_1 \cos i}{\sin i_1 \sin i}. \end{aligned} \quad (3)$$

Экваториальные элементы орбиты Луны вычисляются либо по заданным координатам и составляющим скорости Луны, либо (при отсутствии таковых) по средним элементам лунной орбиты отнесенным к эклиптике, которые приводятся в «Астрономическом ежегоднике СССР».

## § 2. Выбор произвольных постоянных

Аналитические выражения для вековых и долгопериодических возмущений орбиты спутника от внешнего тела, полученные в [1], имеют вид

$$\begin{aligned} e &= e_0 + f_1(v, a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_{00}), \\ i &= i_0 + f_2(v, a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_{00}), \\ \Omega &= \Omega_0 + f_3(v, a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_{00}), \\ \omega &= \omega_0 + f_4(v, a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_{00}), \\ M_0 &= M_{00} + f_5(v, a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_{00}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $v$  — невозмущенная истинная аномалия спутника,  $a_0, l_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_{00}$  — постоянные интегрирования,  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) — некоторые вполне определенные функции  $v$ . Будем означать для краткости систему (4) в виде

$$\vartheta_i = \vartheta_{i0} + f_i(v, a_0, \vartheta_{0j}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5).$$

Численное интегрирование системы (1) проводилось при следующих начальных условиях:  $v = v_0$  и  $\vartheta_i = \vartheta_i^{(0)}$ .

Тогда

$$\vartheta_i^{(0)} = \vartheta_{i0} + f_i(v_0, a_0, \vartheta_{0j}) \quad (5)$$

и искомое  $\vartheta_{i0}$  нужно находить, решая нелинейную систему (5). Однако при рассмотрении возмущений первого порядка можно положить в  $f_i(v_0, a_0, \vartheta_{0j})$  значение  $\vartheta_{0j} = \vartheta_j^{(0)}$  и поэтому

$$\vartheta_{i0} = \vartheta_i^{(0)} - f_i(v_0, a_0, \vartheta_j^{(0)}). \quad (6)$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \vartheta_{i\phi} &= \vartheta_i^{(0)} - f_i(v_0, a_0, \vartheta_j^{(0)}) + \delta_1 \vartheta_i, \\ \vartheta_{ir} &= \vartheta_i^{(0)} + \delta e. \end{aligned}$$

Где обозначено через  $\vartheta_{i\phi}$  значение какого-либо элемента, полученного расчетом по формуле, а через  $\vartheta_{ir}$  — значение, получаемое численным интегрированием.

### § 3. Сравнение результатов расчета по формулам с результатами численного интегрирования

Результаты расчетов по формулам и результаты численного интегрирования уравнений (1) приведены на графиках рис. 1—3. На всех графиках приведено значение возмущений экваториальных элементов в момент прохождения спутником перигея. Пунктирной линией отмечены значения, полученные численным интегрированием, а сплошной линией — результаты расчетов по аналитическим зависимостям. Как известно, большая полуось орбиты спутника не имеет вековых и долгопериодических возмущений от внешнего тела, что и иллюстрируется рис. 1. Из рис. 1 видно, что большая полуось имеет только периодические возмущения с амплитудой колебания

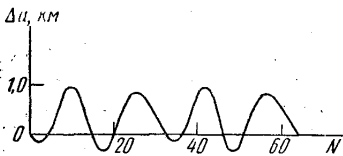


Рис. 1. Возмущение большой полуоси  $a$  в перигее согласно результатам численного интегрирования

около 1 км. На рис. 2 представлено возмущение в перигее эксцентриситета  $e$  и наклона  $i$ , где видно, что  $e$  и  $i$  имеют вековой уход, равный соответственно  $1,1 \cdot 10^{-3}$  и  $-3 \cdot 10^{-4}$  за период обращения Луны.

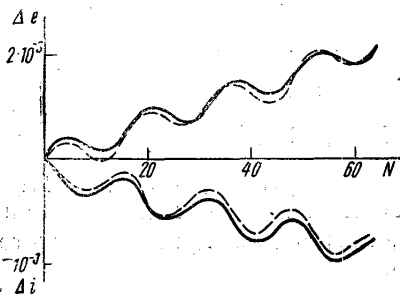


Рис. 2. Возмущение эксцентриситета  $e$  и наклона  $i$  в перигее. Прямая линия — расчеты по формулам, пунктирная — численное интегрирование

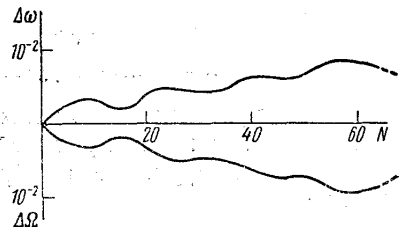


Рис. 3. Возмущение долготы перигея  $\omega$  и долготы восходящего узла  $\Omega$  в перигее. Обозначения те же, что на рис. 2

На рис. 3 представлено возмущение долготы перигея  $\omega$  и долготы восходящего узла  $\Omega$ . Вековое изменение этих элементов настолько боль-

шее, что в масштабе графика долгопериодические возмущения едва просматриваются.

Вековой уход за период обращения Луны составляет для  $\Omega$ :  $-4,7 \cdot 10^{-3}$ , для  $\omega$ :  $4,1 \cdot 10^{-3}$ . Период долгопериодических возмущений элементов равен половине периода обращения Луны.

Разность значений элементов, полученных численным интегрированием и расчетами по формулам, нигде не превышает  $15''$ , что обеспечивает точность определения координат рассматриваемого спутника не более 3 км.

Если для вычислений возмущений использовать полученные автором формулы, учитывающие эксцентриситет орбиты спутника, эксцентриситет лунной орбиты, а также параллактические члены, то можно достичь большей точности.

#### § 4. Сравнение с наблюдениями

Проведение сравнения численных результатов, полученных по формулам, с результатами наблюдения конкретных ИСЗ наталкиваются на определенные трудности. Эти трудности вызваны тем, что работ, в которых полученные из наблюдений величины возмущений от Луны и Солнца отделены от других возмущающих факторов, очень мало. Здесь приводятся результаты наблюдений и величины лунно-солнечных

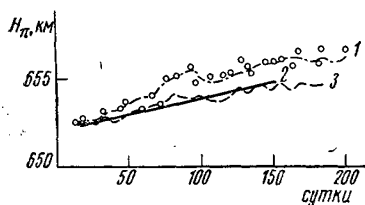


Рис. 4. Возмущение высоты перигея  $H_{\pi}$  спутника «Авангард-1»: 1 — возмущение от Луны, Солнца и солнечного давления, согласно [3], 2 — величины возмущений от Луны и Солнца, полученные автором, 3 — возмущение от Луны и Солнца, согласно [3]. Кружками обозначены величины  $H_{\pi}$ , полученные из наблюдений

спутников опубликованы в [2]. Для спутника 1958  $\beta_2$  в [3] приведены (см. рис. 4) возмущение высоты перигея от Луны и Солнца (пунктирная линия), а также возмущение высоты перигея от Луны, Солнца и солнечного давления (штрих-пунктирная линия). Эти кривые построены на основе расчетов по полученным авторами формулам. Значения высоты перигея, полученные из наблюдений, отмечены кружками. На интервале времени, равном 150 суткам, были вычислены значения высоты перигея по выведенным нами аналитическим зависимостям и нанесены на рис. 4 сплошной линией.

В обзорном докладе [4] Козаи приводит результаты обработки наблюдений спутника 1960  $j_2$ , полученные Ижаком.

На рис. 5 пунктирной линией показано возмущение эксцентриситета орбиты этого спутника от Луны и Солнца, согласно расчетам Ижака.

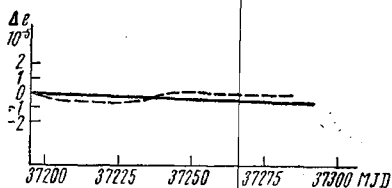


Рис. 5. Возмущение эксцентриситета спутника 1960  $j_2$ . Прямой линией обозначены величины возмущений, полученные автором, пунктирной — величины возмущений, полученные Ижаком.  $e_0 = 0,011414$

возмущений для двух спутников: Авангард-1 (1958  $\beta_2$ ) и ракета-носитель спутника Эхо-1 (1960  $j_2$ ). Элементы этих спутников

Если к этим возмущениям прибавить возмущение от светового давления, то, согласно [4], будем иметь хорошее совпадение с наблюдениями. Результаты расчетов по нашим аналитическим зависимостям изображены на рис. 5 сплошной линией. Величины возмущений от Луны и Солнца остальных элементов, получаемых из наблюдений, упомянутые авторы, к сожалению, не приводят.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Долгачев В. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астроном., № 1, 1968.
2. Sky and Telescope, 20, No. 3, 1960.
3. M u s e n P. et al. «Science», 131, 935, 1960.
4. Козаи И. Проблемы движения искусственных небесных тел. М., Изд-во АН СССР, 1963.

Поступила в редакцию  
23.4 1968 г.

Кафедра  
небесной механики и гравиметрии

---