Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1969

УДК 521.13

В. С. УРАЛЬСКАЯ

ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ОКОЛОПОЛЯРНЫХ СПУТНИКОВ ПОД ВЛИЯНИЕМ ЛУННО-СОЛНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В работе проведено качественное исследование эволюции орбит околополярных спутников под влиянием лунно-солнечных возмущений. Эти орбиты относятся к числу критических вследствие появления малых знаменателей. В качестве промежуточной орбиты взята орбита обобщенной задачи двух неподвижных центров. Учитывались только критические члены возмущающей функции, которые могут дать большие амплитуды возмущений. Получена общая картина движения во всех возможных случаях.

В работе рассматривается задача о влиянии Луны и Солнца на движение околополярных спутников, т. е. спутников, орбиты которых наклонены к плоскости земного экватора под углом, близким к 90°. Эти орбиты относятся к числу критических в результате появления малых знаменателей, и в [1] они не рассмотрены. Однако исследование околополярных спутников имеет большое значение для практики. В настоящее время на околополярные орбиты запущено большое число спутников для самых различных целей.

§ 1. Промежуточная орбита

Возьмем прямоугольную систему координат с началом в центре масс Земли так, чтобы плоскость xy совпадала с плоскостью земного экватора, а ось oz была направлена в северный полюс мира. Аппроксимируем потенциал Земли потенциалом двух неподвижных центров с массами $\frac{m}{2}(1+i\sigma)$ и $\frac{m}{2}(1-i\sigma)$, находящимися на мнимом расстоянии $2ic$ друг от друга. Постоянные c и σ выбираются таким образом, чтобы первые три члена разложения потенциала двух неподвижных центров в ряд по полиномам Лежандра совпадали с первыми тремя членами разложения потенциала Земли. Тогда постоянные c и σ равны $c=209{,}8$ *км*, $\sigma=-0{,}036$.

Решение обобщенной задачи двух неподвижных центров в случае асимметрии полушарий дано в работе [2]. Для околополярных орбит ($84°<i<96°$) величина $\alpha=\cos i$ будет малой первого порядка, формулы промежуточного движения упрощаются и будут иметь вид

$$x = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w,$$

$$y = \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \quad z = c\sigma + \xi\eta, \tag{1}$$

где ξ и η определяются из равенств

$$\xi = \frac{a[1 - e\bar{e} + (\bar{e} - e)\cos\psi]}{1 + \bar{e}\cos\psi}, \tag{2}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}\sin\varphi + \gamma}{1 + d\sin\varphi}, \tag{3}$$

в которых

$$\bar{e} = e[1 - \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - 2\alpha^2 - \varepsilon^2)],$$

$$\gamma = \varepsilon\sigma[1 - 2\alpha^2 + \varepsilon^2(1 - e^2)],$$

$$d = \varepsilon\sigma\sqrt{1 - \alpha^2}[1 + \varepsilon^2(1 - e^2)].$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий сжатие Земли и определяемый соотношением $\varepsilon = c/p$, где $p = a(1 - e^2)$. Для Земли этот параметр мал и равен примерно 0,03, т. е. $\varepsilon^2 \sim 10^{-3}$. Формулы для коэффициентов представлены в виде рядов по степеням малых параметров ε и σ, причем σ имеет тот же порядок, что и ε. В этих рядах сохранены члены до 10^{-6} включительно.

Угловые переменные φ и ψ, входящие в формулы (2) и (3), связаны между собой соотношением

$$\varphi = (1 + \nu)\psi + \omega_0 - \frac{k_2^2}{8}(1 + \nu)\sin 2\psi + \frac{k_1^2}{8}\sin 2\zeta,$$

где

$$\zeta = (1 + \nu)\psi + \omega_0,$$

$$\nu = -\frac{3}{4}\varepsilon^2(1 + \sigma^2 - 5\alpha^2) + \frac{3}{64}\varepsilon^4(9 + 26e^2), \tag{4}$$

$$k_1^2 = \varepsilon^2[(1 - e^2)(1 - \alpha^2) + \sigma^2],$$

$$k_2^2 = \varepsilon^2 e^2[1 - \alpha^2 - \varepsilon^2(2 + e^2)],$$

а ω_0 — постоянная интегрирования.

Угловая переменная w определяется формулой

$$w = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha\sin\varphi + \beta}{\cos\varphi}\right) + \tilde{\Omega},$$

где

$$\Omega = \mu\psi + \Omega_0 + \mu_1\sin\psi + \mu_2\sin 2\psi,$$

а коэффициенты имеют следующие значения:

$$\alpha = \cos i, \qquad \mu_1 = -2\varepsilon^2\alpha e,$$

$$\beta = 2\varepsilon\sigma\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}, \qquad \mu_2 = -\frac{\varepsilon^2\alpha}{4}e^2,$$

$$\mu = -\frac{3}{2}\varepsilon^2\alpha\left\{1 + \sigma^2 - \frac{\varepsilon^2}{8}[11 + 24e^2 - \alpha^2(17 + 24e^2)]\right\}, \tag{5}$$

Ω_0 — постоянная интегрирования.

Связь между промежуточной переменной ψ и временем t будет установлена позднее.

В указанных формулах a, e, α, Ω_0 и ω_0 — постоянные интегрирования. Шестая постоянная M_0 будет введена ниже. Примем эти постоянные за элементы орбиты. При $\varepsilon=0$ и $\sigma=0$ они обратятся в обычные кеплеровские элементы орбиты — большую полуось орбиты спутника, ее эксцентриситет, косинус угла наклона орбиты спутника к плоскости земного экватора, долготу восходящего узла и угловое расстояние перигея от узла. Величина M_0 обратится в среднюю аномалию в эпоху.

§ 2. Уравнения возмущенного движения

Чтобы получить возмущения спутника от Луны и Солнца, будем считать элементы орбиты уже не постоянными, а переменными величинами. Тогда дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника имеют следующий вид [3]:

$$\frac{da}{d\tau} = 2a^2\left(\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u}\right); \tag{6}$$

$$\frac{de}{d\tau} = \frac{p}{e}\left[\frac{\partial R'}{\partial v} + \frac{\partial R'}{\partial u} - \left(1-e^2\right)\frac{\partial F'}{\partial u}\right]; \tag{7}$$

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{p\cos i}{s}\left(\cos i\,\frac{\partial F'}{\partial u} - \frac{\partial F'}{\partial \Omega}\right); \tag{8}$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \mu + p\,\frac{\cos i}{s}\,\frac{\partial F'}{\partial s}; \tag{9}$$

$$\frac{du}{d\tau} = 1 + \nu - \frac{p(1-s^2)}{s}\,\frac{\partial F'}{\partial s}; \tag{10}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = 1 - \frac{p}{e}\left(\frac{\partial R'}{\partial e} + \frac{\partial \Phi'}{\partial u}\right); \tag{11}$$

где R', F' и Φ' связаны с возмущающей функцией R следующим образом:

$$R' = \frac{R}{fM}, \quad F' = \left(\frac{r}{p}\right)^2 R', \quad \Phi' = \frac{r^2}{p^2}(2+e\cos v)\sin v R',$$

f — постоянная тяготения, M — масса Земли, r — радиус-вектор спутника. Элементы u и v при $\varepsilon=0$ и $\sigma=0$ обращаются в аргумент широты и истинную аномалию. Постоянные μ и ν, определяющие вековые изменения элементов Ω и u, выражаются через элементы орбиты по формулам (5) и (4). Вспомогательная переменная τ связана со временем t дифференциальным соотношением

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\xi^2 + c^2\eta^2}{n_2},$$

где

$$n_2 = \sqrt{fMp}\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{4}(2+e^2) - \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{4}(8-e^2) - \frac{\varepsilon^4}{64}(8+56e^2+5e^4)\right].$$

Выражение для возмущающей функции R можно взять из работы [4]

$$R = \frac{fm'}{r'}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^k P_k(\cos H),$$

где m' — масса возмущающего тела (Луны или Солнца), r' — геоцентрический радиус-вектор возмущающего тела, r — радиус-вектор спутника, H — угол между геоцентрическими направлениями на спутник и на возмущающее тело, причем

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}.$$

Здесь x', y' и z' — координаты возмущающего тела. Если пренебречь параллаксом возмущающего тела, то возмущающая функция примет вид

$$R = \frac{m'}{m} \frac{r^2}{r'^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right). \tag{12}$$

После подстановки в равенство (12) выражений координат спутника и возмущающего тела через элементы получим выражения для R', F' и Φ' в виде тригонометрических рядов. Так, для R' будем иметь

$$R' = \sum_{k,j} [A_{kj} \cos(2u + ku' + j\widetilde{\Omega}) + B_{kj} \cos(ku' + j\widetilde{\Omega})] (a_0 + a_2 \cos 2v),$$

где $\widetilde{\Omega} = \Omega - \Omega'$, A_{kj} и B_{kj}, а также a_0 и a_2 будут функциями элементов орбиты a, e и s. Аналогичные разложения будем иметь для F' и Φ'.

Если в выражении для возмущающей функции оставить только вековые и долгопериодические члены, то для R' найдем следующее выражение:

$$R' = a_0 B_{00} + a_0 \sum_{k,j} B_{kj} \cos(ku' + j\widetilde{\Omega}) + \frac{a_2}{2} \sum_{k,j} A_{kj} \cos[2(u - v) + ku' + j\widetilde{\Omega}]. \tag{13}$$

В промежуточном движении, т. е. при $R' = F' = \Phi' = 0$, элементы a и e будут постоянными. Из уравнений (10) и (11) имеем

$$\frac{du}{d\tau} = 1 + \nu \text{ и } \frac{dv}{d\tau} = 1.$$

Для промежуточного движения имеем следующие формулы:

$$v = \tau, \quad u = (1 + \nu)\tau + \omega_0, \quad u' = \lambda\tau + u'_0, \quad \widetilde{\Omega} = \mu\tau + \widetilde{\Omega}_0,$$

где величина $\lambda = n'/n$ есть отношение средних движений возмущающего тела и спутника. Для близких спутников с большой полуосью до 10 000 *км* эта величина имеет порядок 10^{-3}.

Ввиду того что возмущающая функция R' может быть представлена рядом (13), то при интегрировании уравнений возмущенного движения получим члены вида

$$\frac{\sin[2(u - v) + ku' + j\widetilde{\Omega}]}{k'\nu + k\lambda + j\mu} \text{ и } \frac{\sin(ku' + j\widetilde{\Omega})}{k\lambda + j\mu}.$$

Оценим порядок величин ν и μ. Величина ν, характеризующая вековое изменение перигея, имеет порядок $\varepsilon^2 \sim 10^{-3}$. Величина μ для околополярных орбит ($i \sim 90°$) близка к нулю.

Следовательно, при некоторых значениях k', k и j появятся малые знаменатели. Знаменатели вида $k'\lambda + j\mu$ таковы, что их можно оценить снизу, и они по модулю всегда больше 10^{-3}. Для околополярных орбит самые малые знаменатели получим при $k' = 0$ и $k = 0$. Для остальных k' и k они по крайней мере больше 10^{-3}.

При $k'=k=0$ мы имеем

$$R' = A_0 + A_1 \cos \widetilde{\Omega} + A_2 \cos 2\widetilde{\Omega}, \tag{14}$$

$$F' = B_0 + B_1 \cos \widetilde{\Omega} + B_2 \cos 2\widetilde{\Omega},$$

$$\Phi' = 0, \tag{15}$$

где постоянные A и B даются формулами

$$A_0 = \frac{\beta^2 \sqrt{1-e^2}}{16a} (1-3\alpha^2)(1-3\alpha'^2),$$

$$A_1 = \frac{3\beta^2 \sqrt{1-e^2}}{4a} \alpha\alpha' \sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\alpha'^2},$$

$$A_2 = \frac{3\beta^2 \sqrt{1-e^2}}{16a} (1-\alpha^2)(1-\alpha'^2),$$

$$B_0 = \frac{\beta^2 (2+3e^2)}{32a (1-e^2)^{3/2}} (1-3\alpha^2)(1-3\alpha'^2),$$

$$B_1 = \frac{3\beta^2 (2+3e^2)}{8a (1-e^2)^{3/2}} \alpha\alpha' \sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\alpha'^2},$$

$$B_2 = -\frac{3\beta^2 (2+3e^2)}{32a (1-e^2)^{3/2}} (1-\alpha^2)(1-\alpha'^2),$$

причем

$$\beta^2 = \frac{m'}{m} \left(\frac{a}{a'}\right)^3.$$

§ 3. Первые интегралы уравнений

Проинтегрируем уравнения (6) и (7) в предположении, что R', F' и Φ' имеют вид (14—15). Тогда элементы a и e будут постоянными во все время движения, т. е. $a=a_0$ и $e=e_0$.

Уравнения (8) и (9) при указанных R', F' и Φ' примут вид

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = p \frac{\partial F'}{\partial \widetilde{\Omega}}, \tag{16}$$

$$\frac{d\widetilde{\Omega}}{d\tau} = \mu - p \frac{\partial F'}{\partial \alpha}. \tag{17}$$

Эти уравнения имеют первый интеграл вида

$$K = \gamma(\alpha) + F'(\alpha, \widetilde{\Omega}).$$

Для околополярных орбит величина α имеет порядок ε. Величина β^2 для близких спутников с большой полуосью до 10 000 *км* имеет порядок ε^4. Если при разложении функций R' и F' ограничиться членами порядка ε^4 включительно, то получим интеграл уравнений (16) и (17) в виде

$$K = \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2 \alpha^2}{p} - \frac{\beta^2 (2+3e^2)}{16a (1-e^2)^{3/2}} + \frac{3\beta^2 (2+3e^2)(1-\alpha'^2)}{16a (1-e^2)^{3/2}} \cos^2 \widetilde{\Omega}.$$

Выразим этот интеграл через начальные условия, тогда для определения α будем иметь следующую квадратуру:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)}} = \rho d\tau, \tag{18}$$

где

$$f(\alpha) = -(\alpha^2 - \alpha_0^2)^2 + \varkappa^2(\alpha^2 - \alpha_0^2)(2\cos^2\widetilde{\Omega}_0 - 1) + \varkappa^4(\cos^2\widetilde{\Omega}_0 - \cos^4\widetilde{\Omega}_0),$$

$$\rho = \frac{3}{2}\varepsilon^2, \qquad \varkappa^2 = \frac{\beta^2(2 + 3e^2)(1 - \alpha'^2)}{4\varepsilon^2\sqrt{1 - e^2}}.$$

Значения величин β^2 и $\varkappa^2$ в случае Луны и Солнца для различных расстояний спутников от поверхности Земли и двух значений эксцентриситета $e=0$ и $e=0{,}5$ приведены в таблице.

Значения β^2 и $\varkappa^2$

a, км	$\beta^2_{☾}$	$\beta^2_{\odot}$	$\varkappa^2_{☾}$		$\varkappa^2_{\odot}$	
			$e=0$	$e=0{,}5$	$e=0$	$e=0{,}5$
6 600	$0{,}67\cdot10^{-7}$	$2{,}9\cdot10^{-8}$	$0{,}47\cdot10^{-5}$	$0{,}41\cdot10^{-5}$	$1{,}8\cdot10^{-6}$	$1{,}6\cdot10^{-6}$
7 000	$0{,}80\cdot10^{-7}$	$3{,}4\cdot10^{-8}$	$0{,}61\cdot10^{-5}$	$0{,}55\cdot10^{-5}$	$3{,}0\cdot10^{-6}$	$2{,}7\cdot10^{-6}$
8 000	$1{,}2\cdot10^{-7}$	$0{,}9\cdot10^{-7}$	$1{,}2\cdot10^{-5}$	$1{,}1\cdot10^{-5}$	$1{,}1\cdot10^{-5}$	$0{,}98\cdot10^{-5}$
10 000	$2{,}3\cdot10^{-7}$	10^{-7}	$0{,}58\cdot10^{-4}$	$3{,}0\cdot10^{-5}$	$1{,}8\cdot10^{-5}$	$1{,}6\cdot10^{-5}$
20 000	$1{,}8\cdot10^{-6}$	$0{,}8\cdot10^{-6}$	$1{,}2\cdot10^{-3}$	10^{-3}	$0{,}6\cdot10^{-3}$	$0{,}49\cdot10^{-3}$

Для корней $f(\alpha)$ имеет следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,3} &= \pm\sqrt{\alpha_0^2 + \varkappa^2\cos^2\widetilde{\Omega}_0}, \\ \alpha_{2,4} &= \pm\sqrt{\alpha_0^2 - \varkappa^2\sin^2\widetilde{\Omega}_0}. \end{aligned} \tag{19}$$

Как видно из таблицы, если $\alpha_0 \sim \varepsilon$, $\varkappa^2 \sim \varepsilon^4$, то корни $\alpha_{1,3}$ и $\alpha_{2,4}$ имеют тот же порядок, что и α_0, т. е. ε.

§ 4. Качественное исследование движения

Пусть начальное значение наклона орбиты таково, что

$$\alpha_0^2 > \varkappa^2\sin^2\widetilde{\Omega}_0. \tag{20}$$

В правой части указанного неравенства стоит величина порядка выше, чем ε^2, т. е. этот случай существен при рассмотрении околополярных орбит. При выполнении условия (20) все корни уравнения $f(\alpha) = 0$ действительны.

Так как многочлен $f(\alpha)$ стоит под знаком корня, то он должен быть неотрицательным. Поэтому движение возможно только при $f(\alpha) \geqslant 0$. Многочлен $f(\alpha)$ можно представить в виде

$$f(\alpha) = (\alpha_1^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - \alpha_2^2), \tag{21}$$

следовательно, он будет положительным при $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$, если $\alpha_0 > 0$, т. е. $i_0 < 90°$, и при $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$, если $\alpha_0 < 0$, т. е. $i_0 > 90°$.

Случай $\alpha_0^2 = \varkappa^2\sin^2\widetilde{\Omega}_0$ соответствует двум действительным и двум нулевым корням уравнения $f(\alpha) = 0$ и является частным случаем первого. Неравенство $\alpha_0^2 < \varkappa^2 \sin^2 \tilde{\Omega}_0$ определяет два действительных и два мнимых корня и соответствует орбитам, отличающимся от полярных примерно на 10′, следовательно, этот случай также требует рассмотрения.

Графики поведения функции $f(\alpha)$ для трех указанных случаев представлены на рисунке 1.

Кроме того, возможны частные случаи, которые приводятся к указанным трем случаям, а также строго полярная орбита, которая имеет место только при определенных начальных условиях, а именно при $\alpha_0 = 0$, $\tilde{\Omega}_0 = 90°$ или 270°.

Рассмотрим подробнее **случай 1.** Пусть начальные α_0 и $\tilde{\Omega}_0$ подчинены условию (20). Квадратуру для определения α с помощью равенства (21) можно записать в виде

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_1^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - \alpha_2^2)}} = \rho\,(\tau - \tau_0). \tag{22}$$

Чтобы привести интеграл к нормальному виду, произведем замену

$$\alpha = \alpha_1 \sqrt{1 - \rho_1^2 \sin^2 \overline{\varphi}}.$$

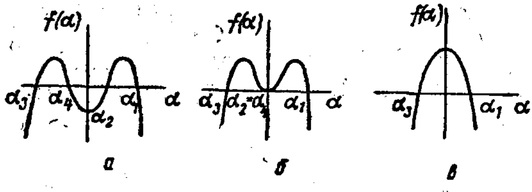

Рис. 1. *а* — случай 1 $\alpha_0^2 > \varkappa^2 \sin^2 \tilde{\Omega}_0$, *б* — случай 2 $\alpha_0^2 = \varkappa^2 \sin^2 \tilde{\Omega}_0$, *в* — случай 3 $\alpha_0^2 < \varkappa^2 \sin^2 \tilde{\Omega}_0$

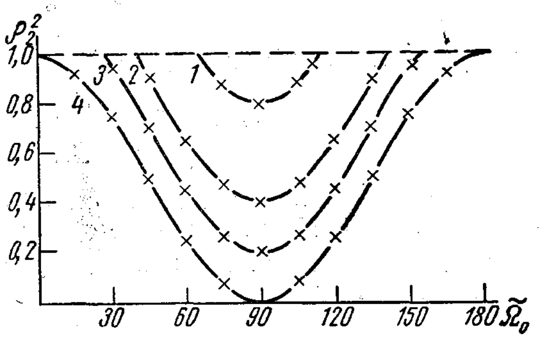

Рис. 2. График зависимости ρ_2^2 от $\tilde{\Omega}_0$ *1* — $\alpha_0^2 = 4 \cdot 10^{-6}$, *2* — $\alpha_0^2 = 2 \cdot 10^{-6}$, *3* — $\alpha_0^2 = 10^{-6}$, *4* — $\alpha_0 = 0$

Тогда уравнение (21) можно переписать так:

$$\int_0^{\overline{\varphi}} \frac{d\overline{\varphi}}{\sqrt{1 - \rho_1^2 \sin^2 \overline{\varphi}}} = \sigma_1 (\tau - \tau_0),$$

где

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} \varepsilon^2 \alpha_1,$$

а модуль ρ_1 определяется формулой

$$\rho_1^2 = \frac{\varkappa^2}{\alpha_0^2 + \varkappa^2 \cos^2 \tilde{\Omega}_0}.$$

Величина модуля ρ_1 зависит главным образом от большой полуоси спутника, которая входит в $\varkappa^2$. Для близких спутников ρ_1 — малая величина порядка ε, т. е. $\rho_1^2 \sim 10^{-3}$. Для более далеких спутников величина ρ_1 увеличивается. В пределе при $\rho_1 = 1$ получим случай 2. Итак, для близких спутников модуль ρ_1 мал. Величина α будет колебаться между некоторыми величинами α_1 и α_2, определяемыми формулами (18), причем область либрации α будет довольно узкой и зависит от начального наклона орбиты к плоскости экватора, начальной разности долгот восходящих узлов Луны (или Солнца) и спутника и от расстояния спутника от поверхности Земли. Период колебаний α очень большой.

Интегрируя уравнение (9) для определения элемента $\tilde{\Omega}$, получим

$$\tilde{\Omega} = \begin{cases} -\bar{\varphi} + \tilde{\Omega}_0 \text{ при } i_0 < 90^\circ \\ +\bar{\varphi} + \tilde{\Omega}_0 \text{ при } i_0 > 90^\circ. \end{cases}$$

Таким образом, величина $\tilde{\Omega}$, которая при $\varepsilon=0$ и $\sigma=0$ обращается в разность долгот восходящих узлов Луны (или Солнца) и спутника, зависит от промежуточной переменной φ вековым образом, причем при прямом движении спутника, т. е. при $i_0<90^\circ$, движение узла обратное, при обратном движении спутника ($i_0>90^\circ$) движение узла прямое. Линия узлов будет совершать один полный оборот за время порядка 10 000 оборотов спутника.

Положение перигея орбиты также будет меняться вековым образом, однако кроме векового изменения линия апсид будет совершать еще и колебания долгого периода. Вековое неравенство содержит часть, обусловленную сжатием Земли и асимметрией ее полушарий, а также часть от влияния Луны и Солнца.

Случай 2. Пусть $\alpha_0^2=\varkappa^2\sin^2\tilde{\Omega}_0$. Тогда многочлен $f(\alpha)$ будет иметь два действительных и отличных от нуля и два нулевых корня. В этом случае многочлен $f(\alpha)$ можно представить в виде

$$f(\alpha) = \alpha^2(\alpha_1^2 - \alpha^2).$$

Функция $f(\alpha)$ будет положительной при условии, что $-\alpha_1<\alpha<\alpha_1$. Квадратура (19) для определения α после замены $\alpha=\alpha_1\cos\chi$ примет вид

$$\int_0^\alpha \frac{d\chi}{\cos\chi} = \sigma_2(\tau - \tau_0),$$

где

$$\sigma_2 = \frac{3}{2}\varepsilon^2\varkappa.$$

Элемент $\tilde{\Omega}$ определяется формулой

$$\tilde{\Omega} = \begin{cases} -\chi + \tilde{\Omega}_0, \text{ если } i_0 < 90^\circ, \\ +\chi + \tilde{\Omega}_0, \text{ если } i_0 > 90^\circ. \end{cases}$$

Вообще говоря, случай 2 является предельным для случая 1, если положить $\rho_1=1$. Поэтому для него справедливы полученные ранее формулы для α и $\tilde{\Omega}$, если в них положить $\rho_1=1$.

Случай 3. Пусть

$$0 < \alpha_0^2 < \varkappa^2 \sin^2\tilde{\Omega}_0. \tag{23}$$

Тогда уравнение $f(\alpha)=0$ будет иметь два действительных и два мнимых корня. Многочлен $f(\alpha)$ в этом случае будет иметь вид

$$f(\alpha) = (\alpha_1^2 - \alpha^2)(\alpha^2 + q^2),$$

где $q^2 = -\alpha_2^2 = \varkappa^2\sin^2\tilde{\Omega}_0 - \alpha_0^2$ — положительная величина. Многочлен $f(\alpha)$ будет положительным при $\alpha_3 < \alpha < \alpha_1$.

Решение уравнения (19) для α имеет вид

$$\alpha = \alpha_1 \cos\bar{\psi},$$

где $\overline{\psi}$ связана с переменной τ соотношением

$$\frac{d\overline{\psi}}{\sqrt{1-\rho_2^2\sin^2\overline{\psi}}}=\sigma_2 d\tau.$$

Здесь коэффициент σ_2 и модуль ρ_2 определяется формулами

$$\sigma_2=\frac{3}{2}\varepsilon^2\varkappa,\quad \rho_2=\frac{\alpha_0^2}{\varkappa^2}+\cos^2\widetilde{\Omega}_0.$$

Модуль ρ_2 при условии (23) всегда меньше единицы, однако при различных значениях $\widetilde{\Omega}_0$ он может принимать любые значения от 0 до 1. На рис. 2 представлен график зависимости квадрата модуля ρ_2^2 от величины $\widetilde{\Omega}_0$ для различных значений наклонов, удовлетворяющих условию (23). График дан для спутника с большой полуосью 6600 *км*. Тем значениям α_0, которые представлены на графике, соответствуют отклонения наклона от 90° на 10′ в ту и другую сторону. Следовательно, для спутников с большими полуосями до 10 000 *км* (случай 3) попадают те из них, для которых наклон заключен в пределах $89°,8<i_0<90°,2$.

Наклон орбиты в случае 3 будет колебаться вокруг значения 90°, долгота восходящего узла при непрерывно изменяющемся $\overline{\psi}$ будет колебаться вокруг значений 90 и 270°, причем амплитуда колебаний зависит от величины модуля ρ_2. При малом ρ_2 амплитуда колебаний мала. В пределе при $\rho_2=1$ получим случай 2.

Полярная орбита. Если начальный наклон орбиты к плоскости экватора равен 90°, то при произвольном $\widetilde{\Omega}_0$ возмущения от Луны и Солнца будут влиять таким образом, что наклон орбиты будет колебаться около значения 90°. Однако если начальные долготы восходящих узлов Луны и спутника разнятся на 90 или 270°, то влияние Луны (или Солнца) при учете только критических членов в дальнейшем не изменит этой орбиты, и она остается полярной во все время движения.

Так как этот случай соответствует плоской задаче, то промежуточная орбита для нее упрощается и имеет вид, приведенный в работе [5].

Основные формулы, описывающие движение во всех трех указанных случаях, будут приведены в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П. Лунно-солнечные возмущения в движении искусственных спутников Земли. «Тр. ГАИШ», т. 35, 1966, стр. 93.
2. Аксенов Е. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 1967.
3. Аксенов Е. П. Один вид дифференциальных уравнений движения спутника. «Тр. ГАИШ», т. 35, 1966, стр. 44.
4. Субботин М. Ф. Небесная механика, т. 2. М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. Уральская В. С. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 34, 1964.

Поступила в редакцию
15.5 1968 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии