Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1969

УДК 539.12.01

В. Б. ГОСТЕВ, В. С. МИНЕЕВ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОДНОЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ЛИ

Исследованы нестабильные одночастичные состояния, соответствующие резонансам в упругом рассеянии в квантовополевой модели с тремя фиксированными источниками (модель типа Ли). Показано, что в этой модели имеется большое разнообразие типов стабильных и нестабильных состояний, не имеющих аналогов в модели Ли. Возможен (при соответствующем подборе постоянных) неэкспоненциальный распад.

Почти единственным примером полевого описания неустойчивых состояний является модель Ли [1]. Оригинальная модель хорошо изучена, описание нестабильного V-состояния [2] стало классическим. Однако после появления работы [3], где было дано новое физическое толкование дискретным состояниям $N\theta$-сектора, стало ясно, что возможности модели Ли далеко не исчерпаны.

В последнее время нестабильные состояния описывались полевыми моделями, являющимися обобщением модели Ли. Одной из таких попыток является настоящая статья, где модель Ли обобщается путем введения тяжелой частицы в $V\theta$-сектор, впервые предложенного в работе [4].

В модели вводятся четыре типа частиц — A, B, C, θ с разрешенными переходами

$$A \rightleftarrows B + \theta, \qquad (1) \qquad\qquad B \rightleftarrows C + \theta. \qquad (2)$$

Гамильтониан взят в виде

$$H = H_0 + H_I,$$

$$H_0 = m_{A0}\int A^*(\vec{p})\,A(\vec{p})\,d^3p + m_{B0}\int B^*(\vec{p})\,B(\vec{p})\,d^3p + m_c\int C^*(\vec{p})\,C(\vec{p})\,d^3p + $$

$$+ \int \omega(\vec{k})\,a^*(\vec{k})\,a(\vec{k})\,d^3k,$$

$$H_I = \lambda_{01}\int \frac{d^3k f(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\int d^3p\,[A^*(\vec{p})\,B(\vec{p}-\vec{k})\,a(\vec{k}) + \text{э. с.}] +$$

$$+ \lambda_{02}\int \frac{d^3k f(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\int d^3p\,[B^*(\vec{p})\,C(\vec{p}-\vec{k})\,a(\vec{k}) + \text{э. с.}],$$

где $\vec{A}(p)\,(A^*(\vec{p}))$, $B(\vec{p})\,(B^*(\vec{p}))$, $C(p)\,(C^*(\vec{p}))$ — неперенормированные фермионные операторы уничтожения (рождения) тяжелых A-, B- и C-частиц, удовлетворяющие обычным соотношениям антикоммутации; $a(\vec{k})\,(a^*(\vec{k}))$ — бозонный оператор уничтожения (рождения) релятивистской θ-частицы, удовлетворяющий обычным коммутационным соотношениям, $\omega(k)\equiv\omega_k=\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}$, μ — масса θ-частицы, $f(\omega)$ — действительная обрезающая функция, λ_{01}, λ_{02} — неперенормированные константы взаимодействий (1) и (2) соответственно.

Физические одночастичные состояния A- и B-частиц ($|A)$ и $|B)$) не совпадают с «голыми» состояниями и являются решениями уравнения Шредингера

$$H\,|\,A(\vec{p})) = m_A\,|\,A(\vec{p})),\quad H\,|\,B(\vec{p})) = m_B\,|\,B(\vec{p})).$$

Решения этих уравнений ищутся в виде

$$|\,B(p)) = Z_B^{1/2}\left\{|\,B(\vec{p})\rangle + \int d^3k\varphi(\vec{k})\,C^*(p-\vec{k})\,a^*(\vec{k})\,|\,0\rangle\right\},$$

$$|\,A(\vec{p})) = Z_A^{1/2}\left\{|\,A(\vec{p})\rangle + \int d^3k\varphi_1(\vec{k})\,B^*(p-k)\,a^*(\vec{k})\,|\,0\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2!}}\int d^3kd^3q\varphi_2(\vec{k},\vec{q})\,C^*(p-\vec{k}-\vec{q})\,a^*(\vec{k})\,a^*(\vec{q})\,|\,0\rangle\right\}$$

с условием нормировки

$$(A(\vec{p}\,')\,|\,A(\vec{p})) = (B(\vec{p}\,')\,|\,B(\vec{p})) = \delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,').$$

Решение уравнения Шредингера в секторе (1,1) совпадает с решением $N\theta$-сектора обычной модели Ли, причем

$$\varphi(\vec{k}) = -\lambda_{02}\frac{u_k}{\omega_k-b},$$

где $u_k=f(k)(2\omega_k)^{-1/2}$, $b=m_B-m_c$,

$$m_B = m_{B0}+\delta m_B,$$

$$\delta m_B = -\gamma_{02}\int\frac{d^3ku_k^2}{\omega_k-b},\quad \gamma_{02}=\lambda_{02}^2,$$

$$Z_B^{-1} = 1+\gamma_{02}\int\frac{d^3ku_k^2}{(\omega_k-b)^2}.$$

В дальнейшем всюду будем считать $b<\mu$ (B-частица стабильна).

Рассмотрение сектора (1,2) приводит к следующим соотношениям для $\varphi_1(\vec{k})$, $\varphi_2(\vec{k},\vec{q})$:

$$m_A = m_{A0}+\lambda_{01}\int d^3ku_k\varphi_1(\vec{k}), \tag{3}$$

$$m_A\varphi_1(\vec{k}) = (m_{B0}+\omega_k)\,\varphi_1(\vec{k})+\lambda_{01}u_k+\sqrt{2}\lambda_{02}\int d^3qu_q\varphi_2(\vec{k},\vec{q}), \tag{4}$$

$$m_A\varphi_2(\vec{k},\vec{q}) = (m_c+\omega_k+\omega_q)\,\varphi_2(\vec{k},\vec{q})+\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_{02}\,[u_k\varphi_1(\vec{q})+u_q\varphi_1(\vec{k})]. \tag{5}$$

Получающееся из уравнений (3)—(5) интегральное уравнение для $\varphi_1(\vec{k})$ проще всего проанализировать, заменив в этом уравнении ядро на вырожденное [5]. В результате получается уравнение

$$\varphi_1(\vec{k}) = \frac{u_k}{(\omega_k - \omega_0)[1 + \gamma_{02}P(\omega_k, \omega_0)]}\left[-\lambda_{01} + \gamma_{02}\frac{1}{\mu + \omega_k - \omega_0 - b}\int d^3q u_q \varphi_1(\vec{q})\right], \tag{6}$$

где $\omega_0 = m_A - m_B$,

$$P(\omega_k, \omega_0) = \int \frac{u_q^2 d^3q}{(\omega_q - b)(\omega_k + \omega_q - \omega_0 - b)}.$$

Уравнение Фредгольма (6) имеет решение

$$\varphi_1(k) = -\lambda_{01}\frac{u_k}{(\omega_k - \omega_0)[1 + \gamma_{02}P(\omega_k, \omega_0)]}\cdot\left[1 + \gamma_{02}\frac{G(\omega_0)}{\mu + \omega_k - \omega_0 - b}\right], \tag{7}$$

где

$$G(\omega_0) = \frac{F(\omega_0)}{1 - \gamma_{02}T(\omega_0)}, \tag{8}$$

$$F(\omega_0) = \int \frac{u_k^2 d^3k}{(\omega_k - \omega_0)[1 + \gamma_{02}P(\omega_k, \omega_0)]}, \tag{9}$$

$$T(\omega_0) = \int \frac{u_k^2 d^3k}{(\omega_k + \mu - \omega_0 - b)(\omega_k - \omega_0)[1 + \gamma_{02}P(\omega_k\omega_0)]}. \tag{10}$$

При $\gamma_{02}=0$ $\varphi_1(\vec{k})$ совпадает с соответствующей функцией в модели Ли [1]. Подставляя решение уравнения Фредгольма (7)—(10) в соотношение (3), получаем массовое уравнение

$$m_{A_0} - m_A = \gamma_{02}G(\omega_0), \tag{11}$$

которое мы и будем рассматривать. Нас интересуют физические одночастичные состояния, энергии (массы) которых являются корнями уравнения (11).

Проанализируем функцию $G(\omega_0)$. Предварительные соображения относительно поведения этой функции были приведены в [5], но там это было сделано недостаточно корректно, что привело к целому ряду неточностей.

В качестве первого шага воспользуемся методикой, развитой в [3], состоящей в использовании конкретного формфактора

$$f(k) = \frac{M^2}{M^2 + k^2},$$

который, в соответствии с [3], обеспечивает сходимость всех интегралов. Кроме того, не ограничивая общности (см. [3], [6]), для простоты вычислений будем считать θ-частицу нерелятивистской, т. е. положим в H_0

$$\omega_k = \mu + \frac{k^2}{2\mu}$$

и заменим в H_I $\sqrt{2\omega_k}$ на $\sqrt{2\mu}$. Заметим, что при $\omega_0 < \mu$ $G(\omega_0)$ — действительная функция. Точка $\omega_0 = \mu$ является точкой ветвления в комплексной ω_0-плоскости и при $\omega_0 > \mu$ у функции $G(\omega_0)$ появляется разрез вдоль действительной оси. Используя сделанные допущения, нетрудно получить

$$F(\omega_0) = \int_0^d \frac{u_k^2 d^3k}{\omega_k - \omega_0 + \gamma_{02}\left[\frac{\pi^2 M^3}{(M+a)^2} - \frac{\pi^2 M^3}{(M + i\sqrt{d^2 - k^2})^2}\right]} +$$

$$+ \int_d^\infty \frac{u_k^2 d^3k}{\omega_k - \omega_0 + \gamma_{02}\left[\frac{\pi^2 M^3}{(M+a)^2} - \frac{\pi^2 M^3}{(M + \sqrt{k^2 - d^2})^2}\right]},$$

где $\frac{a^2}{2\mu} = \mu - b > 0$, $d^2 = a^2 + k_0^2$.

Поведение функции $F(\omega_0)$ изображено на рис. 1.

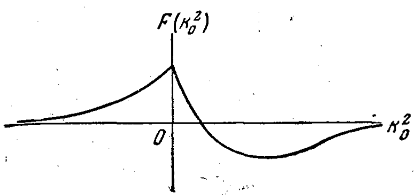

Рис. 1. Поведение функции $F(\omega_0)$. При $k_0^2 > 0$ $(\omega_0 > \mu)$, соответствующие интегралы берутся в смысле главного значения. Поведение функции $F(\omega_0)$ аналогично поведению пропагатора $N\theta$-сектора модели Ли [3]

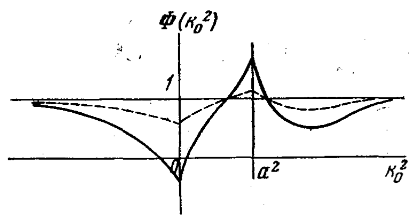

Рис. 2. График функции $\Phi(\omega_0)$ для любых γ_{02}. Пунктирная кривая соответствует малым γ_{02}

Рассмотрим знаменатель функции $G(\omega_0)$: $\Phi(\omega_0) = 1 - \gamma_{02} T(\omega_0)$.

$T(\omega_0)$ можно представить в виде

$$T(\omega_0) = \int \frac{u_k^2 d^3k}{(\omega_k + \mu - \omega_0 - b)(\omega_k - \omega_0)} [1 - \gamma_{02} P(\omega_k, \omega_0) + \gamma_{02}^2 P^2(\omega_k, \omega_0) - \ldots].$$

При γ_{02} малом этот интеграл берется в явном виде, который мы из-за громоздкости получающихся выражений не приводим и $\Phi(\omega_0)$ в этом случае изображается пунктирной кривой на рис. 2. Для любых γ_{02} анализ функции $T(\omega_0)$ несколько более сложен и величина γ_{02} в принципе не меняет поведения функции $T(\omega_0)$. График функции $\Phi(\omega_0)$ для любых γ_{02} приведен на рис. 2.

Таким образом, при γ_{02} весьма малом поведение функции $G(\omega_0)$ практически совпадает с поведением функции $F(\omega_0)$ и при $\gamma_{02} \to 0$ массовое уравнение по виду совпадает с массовым уравнением для $N\theta$-сектора модели Ли (см. [3]). С ростом γ_{02} от нуля до некоторой γ_{02}' никаких принципиальных отличий от случая [10] не наблюдается, хотя в точке $k_0^2 = 0$ $(\omega_0 = \mu)$ величина функции $G(\omega_0)$ с ростом γ_{02} $(\gamma_{02} < \gamma_{02}')$ растет до ∞. При этом имеют место одно связанное состояние (при

$\omega_0 < \mu$) и 0,1 или 2 резонанса (в зависимости от величин затравочной массы m_{A_0} и параметра M) (при $\omega_0 > \mu$). Заметим, что мы определяем энергии резонансов как нули $\mathrm{Re}\, G(\omega_0)$ в соответствии с работой [7], где показано, что такое определение не противоречит общепринятому.

Но при $\gamma_{02} > \gamma'_{02}$ возникает принципиальное отличие: в окрестности точки $\omega_0 = \mu$ появляются полюсы $\mathrm{Re}\, G(\omega_0)$, один из которых с дальнейшим ростом γ_{02} перемещается налево вдоль энергетической оси (стабильная область), а второй — направо (резонансная область) (рис. 3). В отли

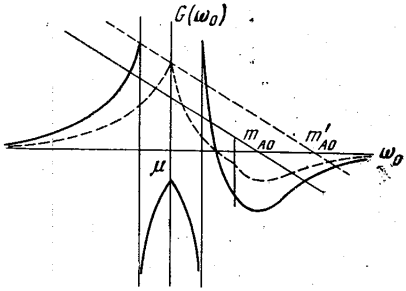

Рис. 3. Поведение функции $G(\omega)$. При малых γ_{02} полюсы $G(\omega_0)$ отсутствуют (пунктирная кривая). Начиная с $\gamma_{02} = \gamma'_{02}$ появляются два полюса в точке $\omega_0 = \mu$, расходящиеся от точки $\omega_0 = \mu$ с ростом γ_{02} в противоположные стороны

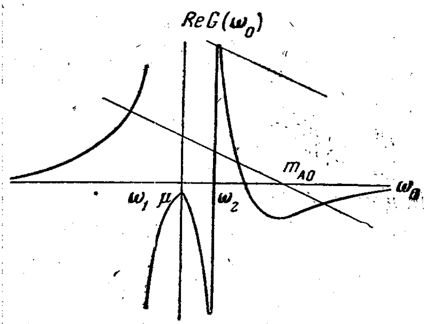

Рис. 4. Вид функции $G(\omega_0)$ с учетом $Im T(\omega_0)$ и $Im F(\omega_0)$ (см. (12)). Точки пересечения наклонной прямой и сплошной кривой соответствуют корням уравнения (11). Величина M_{A_0} соответствует двойному полюсу (см. (13))

чие от [3], где, изменяя m_{A_0}, можно не только сдвигать, но и уничтожить стабильное состояние и низкоэнергетический резонанс (взяв, например, $m_{A_0} > m'_{A_0}$ на рис. 3), оба эти состояния становятся неустранимыми (для данной константы связи $\gamma_{02} > \gamma'_{02}$).

Более того, низкоэнергетический резонанс становится асимптотически неподвижным и его положение зависит только от константы связи γ_{02}. Это связано с тем, что по сути дела у нас написана при $\omega_0 > \mu$ не $\mathrm{Re}\, G(\omega_0)$, а функция

$$g(\omega_0) = \frac{\mathrm{Re}\, F(\omega_0)}{1 - \gamma_{02}\, \mathrm{Re}\, T(\omega_0)}.$$

А $\mathrm{Re}\, G(\omega_0)$ имеет вид

$$\mathrm{Re} G(\omega_0) = \frac{\mathrm{Re}\, F(\omega_0)\,[1 - \gamma_{02}\, \mathrm{Re}\, T(\omega_0)]}{[1 - \gamma_{02}\, \mathrm{Re}\, T(\omega_0)]^2 + \gamma_{02}^2\, [Im T(\omega_0)]^2} - \gamma_{02} \frac{Im F(\omega_0)\, Im T(\omega_0)}{[1 - \gamma_{02}\, \mathrm{Re}\, T(\omega_0)]^2 + \gamma_{02}^2\, [Im T(\omega_0)]^2}. \qquad (12)$$

Влияние $Im\, T(\omega_0)$ и $Im\, F(\omega_0)$ дает поправку, которая учтена на рис. 4. Из рис. 4 ясно видно наличие нескольких низкоэнергетических резонансов, причем энергия одного из них (ω_2) зависит только от константы взаимодействия γ_{02}.

При определенном значении затравочной массы m'_{A_0} (см. пунктирную прямую на рис. 4) оба низкоэнергетических резонанса могут слиться в один, который характеризуется неэкспоненциальным законом распада — получается двойной полюс, зависимость распада которого от времени выражается формулой [8], [9]

$$(A \mid A(t)) = te^{-\Gamma t}, \tag{13}$$

где $\Gamma = Im\, G(\omega_0)$ (см. [7]).

Таким образом, число корней массового уравнения можно систематизировать, что и приведено в таблице.

γ_{02}	m_{A_0}	Число стабильных состояний	Число резонансов
$0 < \gamma_{02} < \gamma'_{02}$	$m_{A_0} > m'_{A_0}$	0	1
	$\mu < m_{A_0} < m'_{A_0}$	1	2 (0)
	$m_{A_0} < \mu$	1	0 (2)
$\gamma'_{02} < \gamma_{02} < \infty$	$m_{A_0} > m'_{A_0}$	1	1
	$\mu < m_{A_0} < m'_{A_0}$	1	3 (1)
	$m_{A_0} < \mu$	2 (1)	4 (2)

Цифры в скобках означают наличие устранимых состояний.

Можно провести более подробную интерпретацию получающихся состояний, но мы этого делать не будем.

Анализ точного решения интегрального уравнения для $\varphi_1(\vec{k})$, получающегося из соотношений (3)—(5), показывает, что все выводы, сделанные для приближенного решения с вырожденным ядром, являются справедливыми и в случае точного решения. Точное решение было получено в работе [11] и дает следующее массовое уравнение:

$$g(\omega_0) = \omega_0 + i\varepsilon - b - \gamma_{02} G_1(\omega_0 + i\varepsilon) = 0,$$

где

$$G_1(\omega_0) = \frac{1}{\pi\gamma} \int_{\mu}^{\infty} \frac{j(\omega, \omega_0)\, Imh(\omega)\, d\omega}{\omega_0 - \omega + i\varepsilon},$$

$$j(\omega, \omega_0) = \frac{1 + h(\omega_0) L_0(\omega, \omega_0)}{1 - h(\omega_0) L_1(\omega_0)},$$

$$L_1(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{h(\omega_0 + b - \omega')}\, Im \frac{1}{h(\omega')}, \tag{14}$$

$$L_0(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0 - b)\, h(\omega_0 + b - \omega')}\, Im \frac{1}{h(\omega')},$$

$$h(\omega) = (\omega - b)\left[1 + 4\pi g^2 (\omega - b) \int_{\mu}^{\infty} \frac{f^2(\omega') \sqrt{\omega'^2 - \mu^2}\, \omega' d\omega'}{(\omega' - b)^2 (\omega' - \omega - i\varepsilon)}\right].$$

Следовательно, задача сводится к нахождению точек пересечения

$$\omega_0 - b = \gamma_{02} G_1(\omega_0)$$

(сравни с уравнением (11) для вырожденного ядра).

Функцию $G_1(\omega_0)$ можно записать в виде

$$G_1(\omega_0) = A(\omega_0) \left\{ \int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{Imh(\omega)\, d\omega}{\omega_0 - \omega + i\varepsilon} + h(\omega_0) \int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{L_0(\omega, \omega_0)\, Imh(\omega)\, d\omega}{\omega_0 - \omega + i\varepsilon} \right\}, \qquad (15)$$

где

$$A(\omega_0) = \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{1 - h(\omega_0) L_1(\omega_0)}.$$

Таким образом, как нетрудно проверить, поведение функции $G_1(\omega_0)$ и ее особенности совпадают с поведением и особенностями функции $A(\omega_0)$. Но $A(\omega_0)$, как было исследовано в [10], представляет собой, с точностью до множителя, пропагатор $V\theta$-сектора модели Ли. Используя результаты работы [10] и подробно рассмотрев второй множитель в формуле (15), можно убедиться, что поведение функции $G_1(\omega_0)$ повторяет все основные особенности $G(\omega_0)$ (8) (см. рис. 4).

Приближенное решение хорошо описывает данную модель и все выводы, касающиеся одночастичных физических состояний, сохраняют свою силу.

Пример рассмотренной модели показывает, что небольшое усложнение оригинальной модели Ли — выход в $V\theta$-сектор и добавление в него тяжелой частицы — дает 2 стабильных и 4 нестабильных состояния, соответствующих всего одному затравочному состоянию, т. е. дает естественную возможность описания неэкспоненциального распада, чем увеличивает возможности физического приложения модели Ли и ее обобщений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963.
2. Glaser V., Källen G. Nucl. Phys., 2, 705, 1956/57.
3. Fonda L., Ghirardi G., Rimini A. Phys. Rev., **133**, B196, 1964,
4. Haber-Shaim V., Thirring W. Nuovo Cim., 2, 100, 1955.
5. Гостев В. Б. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 5, 48, 1966.
6. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1966.
7. Araki H., Munakata Y., Kawaguchi M., Goto T. Progr. Theor. Phys., **17**, 419, 1957.
8. Osborn H. Phys. Rev., **145**, 1272, 1966.
9. Bell J. S., Goebel C. J. Phys., Rev., **138**, B1198, 1965.
10. Гостев В. Б., Минеев В. С. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон. № 1, 23, 1969.
11. Гостев В. Б., Френкин А. Р. ДАН СССР, **170**, 803, 1966.

Поступила в редакцию
19. 2 1968 г.

Кафедра
квантовой теории