

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 2 — 1969

УДК 551.465.631 : 551.526.84

С. Н. ПРОТАСОВ

## О СУТОЧНОМ ХОДЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОВЕРХНОСТНОМ И ПРИВОДНОМ СЛОЯХ МОРЯ И АТМОСФЕРЫ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА ТЕПЛА

Рассмотрено влияние переменного коэффициента турбулентного обмена тепла по вертикали в море и объемного поглощения радиации на формирование температурного поля в поверхностном и приводном слоях моря и атмосферы. Установлено, что температурное поле приводного слоя существенно зависит от схемы турбулентного обмена тепла в верхнем однометровом слое моря.

Формирование и расчет суточного хода температуры при различных исходных данных рассматривались во многих работах. Относятся они преимущественно к поверхностному слою однородного по плотности моря, глубина которого больше глубины распространения температурных колебаний суточного периода. Факторами, определяющими распространение температурных волн в воде, считаются вертикальный турбулентный обмен, теплообмен с атмосферой и поглощение лучистой энергии, проникающей на различные глубины. Значение последнего впервые описано в работах [1, 2]. Однако в них исключался вопрос о формировании температуры поверхности моря, которая принималась заранее известной функцией, а не определялась из решения задачи. Более полная формулировка дана в работах [3, 4, 5].

Формирование суточного хода температуры в [3, 4] рассматривается на основе одноразмерного уравнения турбулентного переноса с объемными источниками тепла, обусловленными поглощением лучистой энергии, а теплообмен с атмосферой учитывается уравнением теплового баланса в граничном условии на поверхности моря. Это требует задания в качестве исходных данных хода во времени актинометрических и метеорологических элементов [3], либо хода во времени эффективного излучения поверхности моря и градиентов температуры, скорости и влажности воздуха [4] на некоторой высоте в приводном слое для определения основных составляющих теплообмена на границе раздела моря — атмосферы. В [5] распределение температур в море и приводном слое атмосферы описывается системой уравнений, однако на некоторой высоте задается ход отклонений температуры воздуха от среднесуточных значений. Такие постановки задачи не дают возможности одновре-

менного определения температурного поля в воде и в приводном слое атмосферы. Это ограничение исключено в работе [6], в которой считается, что формирование температуры в воде определяется вертикальным турбулентным обменом и потоком лучистой энергии, проникающей на разные глубины, а в воздухе — только турбулентным обменом. На поверхности моря происходит расход тепла на испарение и эффективное излучение.

Данная статья является дальнейшим обобщением работы [6] на случай переменного коэффициента турбулентного обмена тепла по глубине в море, который описывается следующим уравнением:

$$k(z) = \begin{cases} k_2 = \text{const}, & 0 \leq z \leq h \\ k_3 = \text{const}, & h < z. \end{cases}$$

Такая схема для  $k(z)$  принята в виде первого приближения для коэффициента турбулентного обмена тепла, полученного в работе [7]. В последней  $k(z)$  увеличивался с глубиной, достигая максимального значения, затем постепенно уменьшался при дальнейшем увеличении глубины.

Замена  $k(z)$ , принятого постоянным в [6], ступенчатой схемой приводит к появлению третьего уравнения в системе и некоторым дополнительным граничным условиям.

Перейдем к постановке задачи. Начало координат расположим на поверхности моря, ось  $z$  направим вертикально в воду, ось  $\xi$  — в воздух. Индекс 1 отнесем к атмосфере, 2 — к поверхностному слою моря толщиной  $h$ , 3 — к нижнему слою. Тогда математическая формулировка задачи о суточном ходе температуры в поверхностном слое моря и в приводном слое атмосферы сводится к совместному решению системы уравнений

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \tilde{k}_1(\xi) \frac{\partial t_1}{\partial \xi} \right], \quad \xi > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_e}{\partial \tau} = k_e \frac{\partial^2 t_e}{\partial z^2} + \frac{1-A}{c_e \rho_e} J_0(\tau) \sum_{m=1}^{\nu} J \beta_m e^{-\beta_m z} \quad (2)$$

(где  $e = 2, 0 \leq z \leq h$ ;  $e = 3, h < z$ ) с граничными условиями

$$t_1(\xi, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$t_3(z, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$t_1(0, \tau) = t_2(0, \tau), \quad (5)$$

$$t_2(h, \tau) = t_3(h, \tau), \quad (6)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = h, \quad (7)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial \xi} = \gamma_1 t_2 \quad \text{при} \quad z = \xi = 0, \quad (8)$$

где

$$\tilde{k}_1(\xi) = k_1(1 + \mu_1 \xi), \quad \lambda_e = c_e \rho_e k_e, \quad e = 2, 3, \quad (9)$$

$$\lambda_1 = (c_p + L\mu_0) \rho_1 k_1 + \frac{\gamma_1 [1 - F(q)]}{\mu_1 F(q)} \ln(1 + \mu_1 h_0),$$

$$\gamma_1 = 4\sigma\delta(273 + t_0)^3 F(q),$$

$$\mu_0 = \frac{10,7}{235 + t_0} \frac{\rho_{\text{max}}}{\rho_0},$$

$L$  — теплота испарения,  $q$  — удельная влажность,  $F(q)$  — функция среднесуточного значения влажности,  $P_{\max}$  — упругость насыщенного водяного пара при среднесуточной температуре воздуха  $t_0$ ,  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $\delta$  — относительная излучательная способность поверхности моря,  $t_0$  — среднесуточная температура воздуха,  $h_0$  — высота в пределах слоя квазистационарности потока тепла,  $\mu_1$  — определяемый по данным наблюдений в приводном слое параметр роста  $\tilde{k}_1(\xi)$  с высотой,  $c$  — теплоемкость,  $\rho$  — плотность,  $J_0(\tau)$  — отклонение потока суммарной солнечной радиации, достигающей поверхности моря, от его среднесуточного значения,  $A$  — альbedo воды,  $J_m$  и  $\beta_m$  — относительная доля потока  $J_0$  и коэффициент объемного ослабления солнечной радиации в воде;  $k$  — коэффициент турбулентного обмена тепла.

Представим поток  $(1-A) J_0(\tau)$  суммарной радиации, проникающей под поверхность моря:

$$(1-A) J_0(\tau) = Re \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-in\omega\tau}, \quad (10)$$

где

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} (1-A) J_0(\tau) e^{in\omega\tau} d\tau,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T \text{ — период, равный суткам.}$$

Тогда чисто периодическое решение для отклонений температуры в воде и воздухе от их среднесуточных значений запишем в виде

$$t_j = Re \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{jn} e^{-in\omega\tau} \quad j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

При замене  $t_j$  на  $\theta_j$  граничные условия сохраняют свой вид вследствие однородности. Подставив (10), (11) в (1) и (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 + \mu_1 \xi) \frac{d\theta_{1n}}{d\xi} \right] + i \frac{n\omega}{k_1} \theta_{1n} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \theta_{en}}{dz^2} + i \frac{n\omega}{k_e} \theta_{en} + \frac{A_n}{\lambda_e} \sum_{m=1}^{\nu} I_m \beta_m e^{-\beta_m z} = 0, \quad (13)$$

где  $e=2, 3$ .

Решения этой системы, удовлетворяющие граничным условиям (3) — (8), можно записать в виде

$$\theta_{1n} = c_{1n} H_0^{(1)}(\eta), \quad (14)$$

$$\theta_{2n} = c_{2n} e^{\delta_{2n} z} + c_{3n} e^{-\delta_{3n} z} + b_{2n} \sum_{m=1}^{\nu} \gamma_{2m} e^{-\beta_m z} \quad 0 \leq z \leq h, \quad (15)$$

$$\theta_{3n} = c_{4n} e^{\delta_{3n} z} + b_{3n} \sum_{m=1}^{\nu} \gamma_{3m} e^{-\beta_m z} \quad h < z, \quad (16)$$

где  $c_{\alpha n} = \frac{\Delta(\alpha)}{\Delta_1}$  и  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ .

$$\Delta = 2d_n [y_n (t_{3n} \text{sh } \delta_{2n} h - t_{2n} \text{ch } \delta_{2n} h) - t_{2n} (t_{3n} - t_{2n}) e^{\delta_{2n} h}] - \\ - x_n (t_{3n} \text{sh } \delta_{2n} h - t_{2n} \text{ch } \delta_{2n} h);$$

$$\Delta^{(1)} = 2e^{\delta_{3n} h} \{t_{2n} (A_n \psi_{2m} \text{ch } \delta_{2n} h + \rho_n \chi_m e^{\delta_{2n} h} + f_{nm}) - \\ - t_{3n} [A_n \psi_{2m} + t_{2n} (g_{nm} + b_{2n} \chi_m e^{\delta_{2n} h})]\};$$

$$\Delta^{(2)} = d_n \{(t_{2n} + \gamma_1) f_{nm} - \rho_n h_m e^{-\delta_{2n} h} - t_{3n} [(t_{2n} + \gamma_1) g_{nm} + b_{2n} h_m e^{-\delta_{2n} h}]\} + \\ + \frac{1}{2} x_n [-\rho_n \chi_m e^{-\delta_{2n} h} + f_{nm} - t_{3n} (b_{2n} \chi_m e^{-\delta_{2n} h} + g_{nm})];$$

$$\Delta^{(3)} = d_n [y_n f_{nm} - \rho_n h_m e^{\delta_{2n} h} + t_{3n} (b_{2n} h_m e^{\delta_{2n} h} - y_n g_{nm})] - \\ - \frac{1}{2} x_n [f_{nm} + \rho_n \chi_m e^{\delta_{2n} h} - t_{3n} (g_{nm} + b_{2n} \chi_m e^{\delta_{2n} h})];$$

$$\Delta^{(4)} = -2H_0^{(1)}(\eta_0) [t_{2n} e^{\delta_{2n} h} (b_{2n} h_m e^{-\delta_{2n} h} - f_{nm} + t_{2n} g_{nm}) + \\ + y_n (f_{nm} \text{sh } \delta_{2n} h - t_{2n} g_{nm} \text{ch } \delta_{2n} h)] - x_n e^{-\delta_{3n} h} (\rho_n \chi_m + \\ + t_{2n} g_{nm} \text{ch } \delta_{2n} h - f_{nm} \text{sh } \delta_{2n} h);$$

$$\gamma_{lm} = \frac{i a_{en}^2 - \beta_m^2}{a_{en}^4 + \beta_m^4} I_m \beta_m; \quad a_{en} = \sqrt{\frac{n\omega}{k_e}}; \quad A_n = \lambda_e b_{en}; \quad t_{en} = \lambda_e \delta_e;$$

$$\delta_{ln} = i \sqrt{i} a_{en}; \quad a_{1n} = \frac{2}{\mu_1} \sqrt{\frac{n\omega}{k_1}}; \quad \eta = a_{1n} \sqrt{i(1 + \mu_1 \xi)}; \quad \eta_0 = \sqrt{i} a_{1n};$$

$$y_n = t_{2n} - \gamma_1; \quad \rho_n = A_n \delta_{2n}; \quad x_n = \lambda_1 \mu_1 \eta_0 H_1^{(1)}(\eta_0) e^{\delta_{3n} h};$$

$$d_n = H_0^{(1)}(\eta_0) e^{\delta_{3n} h}; \quad \psi_{2m} = - \sum_{m=1}^{\nu} \gamma_{2m} (\delta_{2n} + \beta_m); \quad \chi_m = \sum_{m=1}^{\nu} \gamma_{2m};$$

$$h_m = \sum_{m=1}^{\nu} \gamma_{2m} (\gamma_1 + \lambda_2 \beta_m); \quad g_{nm} = \sum_{m=1}^{\nu} e^{-\beta_m h} (b_{3n} \gamma_{3m} - b_{2n} \gamma_{2m});$$

$$f_{nm} = \sum_{m=1}^{\nu} \beta_m e^{-\beta_m h} A_n (\gamma_{2m} - \gamma_{3m});$$

$H_0^{(1)}$  и  $H_1^{(1)}$  — функции Ганкеля первого рода нулевого и первого порядков.

Проведем численный анализ решений (14) и (15) для амплитуды первой гармоники температурной волны при следующих значениях параметров и физических величин<sup>1</sup>:

$c_p = 0,24$ ,  $\rho_1 = 1,29 \cdot 10^{-3}$ ;  $k_1 = 0,16$ ;  $\mu_1 = 30$ ;  $L = 590$ ,  $\sigma = 1,36 \cdot 10^{-12}$ ,  $t_0 = 20$ ,  $\mu_0 = 9,7 \cdot 10^{-4}$ ;  $c_2 = 1$ ;  $\rho_2 = 1$ ,  $F(q) = 0,25$ ,  $I_1 = I_2 = 0,5$ ; для простоты положим  $\rho_2 = \rho_3$ ;  $c_2 = c_3$ .

Рассмотрим характер изменения амплитуды температурной волны в воздухе. Она будет пропорциональна безразмерной величине

$$\theta = \left| \frac{\theta_{11}(\xi) \gamma_1}{A_1 H_0^{(1)}(\eta)} \right|,$$

<sup>1</sup> Если величина характеризуется только численным значением, то она дается в системе СГС, в противном случае указывается также ее размерность.

которая отложена по оси ординат на рис. 1 и 2. По оси абсцисс отложена толщина слоя  $h$  в см. Кривые 1—4 получены для  $k_2/k_3=0,1$ ; кривые 5—8 — для  $k_2=0,8$ . Причем, кривые 4 и 8, построенные для  $\beta_m=1$ , практически совпадают с кривыми для  $\beta \rightarrow \infty$ .

Из рисунков видно, что для коротковолновой части радиации, т. е.  $\beta \sim 10^{-3}$ , величина слоя  $h$ , а также отношения  $k_2/k_3$  оказывают малое влияние на формирование амплитуды температурной волны, которое уменьшается с ростом  $k_2$  и убыванием отношения  $k_2/k_3$  при фиксирован-

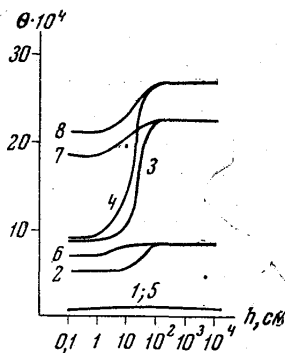


Рис. 1. Зависимость амплитуды температурной волны в воздухе от толщины слоя  $h$ , отношения  $k_2/k_3$  и коэффициента  $\beta_m$  при  $k_2=0,1$ . Кривые 1 и 5 построены для  $\beta_m=10^{-3}$ , 2 и 6 — для  $\beta_m=10^{-2}$ , 3 и 7 — для  $\beta_m=10^{-1}$ , 4 и 8 — для  $\beta_m=1$

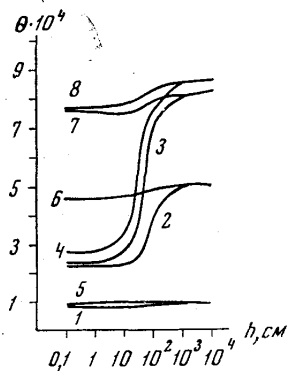


Рис. 2. Зависимость амплитуды температурной волны в воздухе от толщины слоя  $h$ , отношения  $k_2/k_3$  и коэффициента  $\beta_m$  при  $k_2=1$ . Кривые 1 и 5 построены для  $\beta_m=10^{-3}$ , 2 и 6 — для  $\beta_m=10^{-2}$ , 3 и 7 — для  $\beta_m=10^{-1}$ . 4 и 8 — для  $\beta_m=1$

ном значении  $k_2$ . Определяющим фактором является значение  $k_2$ , отношение  $k_2/k_3$  играет роль поправки, роль  $h$  малосущественна.

Для более длинноволновой радиации ( $\beta_m \sim 10^{-1}$ ) интервал  $10 \leq h \leq 100$  оказывает значительное влияние на формирование амплитуды температурной волны — рост  $h$  вызывает резкое увеличение амплитуды, когда  $k_2 < k_3$ . При фиксированном  $h$  одновременный рост  $k_2$  и  $k_3$  вызывает уменьшение амплитуды, а рост отношения  $k_2/k_3$  при постоянном  $k_2$  — ее увеличение.

Левые части рис. 1 и 2 ( $h \leq 1$ ) дают представление об амплитуде температурной волны над морем с коэффициентом обмена  $k_3$  по всей глубине (т. е. слой  $h$  слишком тонок, чтобы играть какую-либо роль в формировании амплитуды), правые части ( $h \geq 1000$ ) — над морем с коэффициентом обмена  $k_2$  (слой  $h$  велик и на амплитуде температуры воздуха не сказывается присутствие слоя 3 с коэффициентом обмена  $k_3$ ). Если же значения  $h$  находятся между этими предельными величинами, то на формирование амплитуды будут влиять значения  $k_2$ ,  $k_3$ , отношение  $k_2/k_3$  и величина  $h$ .

Принятая схема турбулентного обмена тепла по вертикали в море ясно показывает, что значения последнего в интервале  $10 \leq h \leq 100$  оказывают существенное влияние на формирование температурных волн в воздухе, а следовательно, и в прилегающем слое жидкости. Это влияние возрастает с уменьшением отношения  $k_2/k_3$ , прозрачности водоема, величины  $k_2$  и увеличением  $h$ .

Рассмотрим характер изменения амплитуды температурной волны в воде. Если положить  $k_2 = k_3$  — получим постановку задачи и результаты, изложенные в работе [6], основным выводом которой следует считать влияние объемного поглощения на ход изменения амплитуд температурных волн по глубине при малой интенсивности турбулентного обмена в море: максимальные значения их достигаются не на поверх-

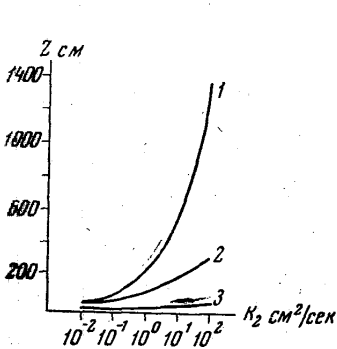


Рис. 3. Зависимость положения максимального значения амплитуды температурной волны в воде от  $k_2$  и  $\beta_m$  при  $k_2 = k_3$ . Кривая 1 получена при  $\beta_m = 10^{-3}$ , 2 — при  $\beta_m = 10^{-2}$ , 3 — при  $\beta_m = 10^{-1}$  и  $\beta_m = 1$

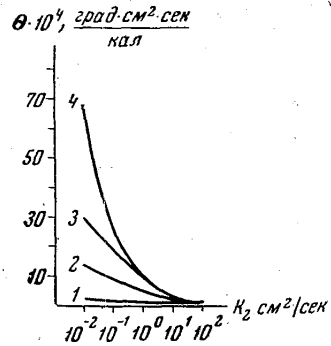


Рис. 4. Зависимость максимального значения амплитуды температурной волны в воде от  $k_2$  и  $\beta_m$  при  $k_2 = k_3$ . Кривая 1 получена при  $\beta_m = 10^{-3}$ , 2 — при  $\beta_m = 10^{-2}$ , 3 — при  $\beta_m = 10^{-1}$ , 4 — при  $\beta_m = 1$

ности, а на некоторой глубине под поверхностью моря. Проиллюстрируем этот вывод.

Рис. 3 дает положение максимального значения амплитуды температурной волны, в воде, отсчитанное от поверхности моря в см, в зависимости от  $k_2$  и  $\beta_m$ . Из рисунка видно, что максимум заглубляется с ростом  $k_2$ , причем особенно резко для коротковолновой части спектра ( $\beta_m \sim 10^{-3}$ ), опускаясь до 10 м. Для более длинноволновой части он расположен в верхнем однометровом слое. Итак, положение максимума зависит от  $k_2$  и прозрачности моря, причем этот максимум расположен тем глубже, чем больше коэффициент турбулентного теплообмена и прозрачность моря.

Сама же величина максимума может быть снята с рис. 4, по оси ординат которого отложена размерная величина, пропорциональная амплитуде

$$\theta = \left| \frac{\theta_{21}(z)}{I_m A_1} \right| = \left[ \frac{\text{град} \cdot \text{сек} \cdot \text{см}^2}{\text{кал}} \right].$$

Из рис. 4 видно, что величина максимума амплитуды температурной волны убывает с ростом турбулентного теплообмена в воде и особенно резко для малопрозрачного водоема.

В заключение сделаем некоторые выводы. Анализ решений (14), (15) показывает, что схема коэффициента турбулентного обмена тепла по вертикали в море для верхнего однометрового слоя оказывает существенное влияние на формирование температурных волн в воздухе. Это влияние возрастает с уменьшением отношения  $k_2/k_3$  при фиксированном  $k_3$ , прозрачности водоема, величины  $k_2$  и возрастании  $h$ .

Если положить коэффициент турбулентного теплообмена постоян-

ным по всей глубине в море и считать, что суммарная солнечная радиация проникает на различные глубины, то для максимума амплитуды температурной волны в воде получим: с ростом турбулентного обмена тепла в море для коротковолновой части спектра ( $\beta_m \sim 10^{-3}$ ) максимум убывает медленно, а его расстояние от поверхности воды быстро увеличивается (опускаясь до 10 м), для более длинноволновой части ( $\beta_m \sim 10^{-1}$ ) величина максимума убывает резко, а сам он локализован в верхнем однометровом слое. При этом максимум, формируемый более длинноволновой частью спектра, намного превосходит величину максимума, возникающего под влиянием коротковолновой радиации солнца.

Автор благодарен А. А. Пивоварову за постановку задачи и за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Доброклонский С. В. ДАН СССР, 45, 9, 1944.
2. Штокман В. Б. «Тр. Ин-та океанологии», вып. 1, 1946.
3. Колесников А. Г. ДАН СССР, 57, 2, 1947.
4. Колесников А. Г. «Изв. АН СССР», сер. геофиз., 2, 1954.
5. Колесников А. Г., Пивоваров А. А. ДАН СССР, 102, 2, 1955.
6. Пивоваров А. А. «Изв. АН СССР», физика океана и атмосферы, 4, 1, 1968.
7. Пивоваров А. А., Анисимова Е. П., Букина Л. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 1, 1967.

Поступила в редакцию  
12.6 1968 г.

Кафедра  
физики моря и вод суши