Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1969

УДК 539.12.01

А. В. БУЛИНСКИЙ

ТЕОРЕМА ГОЛДСТОУНА В АКСИОМАТИЧЕСКИХ ПОДХОДАХ

Вариант теоремы Голдстоуна, предложенный Кастлером, Робинсоном и Свика, переносится в теории, удовлетворяющие аксиомам Вайтмана или Яффе. В отсутствие безмассовых частиц с локальным сохраняющимся током, заданным на локальных состояниях, можно связать симметрию, не нарушенную спонтанно, не постулируя связи автоморфизма полей с током.

После установления теоремы Голдстоуна [1, 2], утверждающей, что спонтанному нарушению симметрии сопутствуют частицы нулевой массы, последовало большое количество работ, посвященных как проблеме спонтанного нарушения симметрии в квантовой теории поля, так и связи «внутренних» и пространственно-временных симметрий. Желательно обосновать эту важную теорему вне лагранжева подхода, отправляясь от возможно меньшего числа основных постулатов. Впервые схема доказательства теоремы в вайтмановской аксиоматике приведена в [3], в алгебраическом подходе был получен другой вариант теоремы [4], который в [5] рассмотрен для евклидовых квантовых теорий поля. В [6] в алгебраическом подходе получен вариант теоремы, совпадающий с оригинальным.

В данной работе рассматривается вариант теоремы, принадлежащий Кастлеру и др. [4]. Мы выясним, приводят ли локальные законы сохранения к глобальным симметриям. Задача по существу сводится к двум: выяснению связи между локальным сохраняющимся током и автоморфизмом полей и выяснению, при каких условиях этот автоморфизм является симметрией. В [4] рассмотрена вторая проблема, доказано при постулировании связи автоморфизма с локальным сохраняющимся током, что симметрия спонтанно не нарушается, если отсутствуют частицы нулевой массы.

Оба вопроса мы хотим рассмотреть для теорий, удовлетворяющих системе аксиом Вайтмана или Яффе (см., например, [17] и [18]).

Известно, что в лагранжевой теории с непрерывной однопараметрической группой преобразований полей можно ввести оператор тока $j_\mu(x)$, причем его дивергенция обращается в нуль, если преобразования оставляют лагранжиан инвариантным. Заряд $Q=\int j_0(\vec{x}, x_0)\,d^3x$, не зависящий от времени, является генератором группы унитарных преобразований, описывающих симметрию. Такая связь между генератором и пространственным интегралом от плотности нарушается в случае спонтанно нарушенных симметрий [7, 8]. Такой интеграл может уже не определять оператор в гильбертовом пространстве состояний. В последние годы в связи с алгеброй токов Гелл-Манна исследовалась возможность связать заряд как с сохраняющимися, так и с несохраняющимися токами [8—16].

Желая получить аналогию с ситуацией в лагранжевом подоходе, мы добавочно к аксиомам постулируем только существование локального сохраняющегося тока с соответствующей областью определения. В дальнейшем речь идет о вайтмановских теориях.

Для всех основных функций $\varphi(x) \in S(R^4)$ [17] существуют 4 неограниченных оператора $j_\mu(\varphi)$ над гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$, $j_\mu(\varphi)$ определены на общей плотной области $D \subset \mathfrak{H}$, не зависящей от φ. Для $\forall\ \Phi, \Psi \in D$ $(\Phi, j_\mu(\varphi)\Psi)$ является обобщенной функцией умеренного роста. Вакуум $\Omega \in D$ и константы $(\Omega, j_\mu(\varphi)\Omega)$ полагаются равными нулю $j_\mu(\varphi) D \subset D$. Кроме того, $D \supset D_0$, где D_0 — совокупность всех локальных состояний Φ, полученных действием на вакуум полиномов по сглаженным полям $A_i(x)$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \int d^4x_1, \ldots, d^4x_k \varphi_k(x_1, \ldots, x_k) A_{i_1}(x_1) \ldots A_{i_k}(x_k)\,\Omega, \tag{1}$$

где $\varphi_k(x_1, \ldots, x_k) \in D(R^{4k})$.

При вещественных φ $j_\mu(\varphi)$ — симметрический оператор на D. При трансляциях: $U(a, 1)\, j_\mu(\varphi)\, U^{-1}(a, 1) = j_\mu(\varphi_a)$ с $\varphi_a(x) = \varphi(x-a)$. Сохранение тока: $\sum\limits_{\mu=0}^{3} j_\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right) = 0$. Локальная коммутативность: $[j_\mu(\varphi), A(\psi)] = 0$, если носители $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ пространственно подобны ($\varphi(x)\psi(y) = 0$ при $(x-y)^2 \geqslant 0$), для любого вайтманова поля A.

Итак, $j_\mu(\varphi)$ обладают всеми обычными свойствами вайтмановых полей, удовлетворяют условию сохранения (a): $\partial^\mu j_\mu(\varphi) = 0$, а также ($b$): $(\Omega, j_\mu(\varphi)\Omega) = 0$. Мы не требуем простого закона преобразования $j_\mu(\varphi)$ относительно однородной группы Лоренца.

Докажем ряд вспомогательных предложений.

Лемма 1. Если минимальная масса в теории отлична от нуля, всякое квазилокальное состояние Φ, т. е. состояние вида (1) с $\varphi_k \in S(R^{4k})$, можно представить в виде

$$\Phi = E_\Omega \Phi + (P_0)^n \Psi_{(n)}, \tag{2}$$

где E_Ω — оператор проектирования на вакуум, P_0 — генератор трансляций по x^0, оператор энергии, n — натуральное число, а $\Psi_{(n)}$ — некоторое квазилокальное состояние.

Это утверждение, являющееся аналогом леммы 3 в [4], следует из сильного спектрального условия: спектр операторов энергии-импульса P_μ содержится в объединении $\{p = 0\} \bigcup \overline{V}_+^m$ ($\overline{V}_+^m$ — замкнутый верхний конус, $\overline{V}_+^m = \{p : p^0 \geqslant m,\ p^2 \geqslant m\}$, а m — минимальная масса (см. [19])).

Достаточно показать справедливость (2) для состояний вида

$$\Phi = \Phi(\varphi) = \int d^4x_1 \ldots d^4x_k \varphi(x_1 \ldots x_k) A_{i_1}(x_1) \ldots A_{i_k}(x_k)\,\Omega. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию $\alpha(p_1^0 + \ldots + p_k^0)$, принадлежащую классу мультипликаторов пространства $S(\widetilde{R}^{4k})$,

$$\alpha_n(y) = \begin{cases} (y)^{-n} & \text{при } |y| > m/2 \\ \text{произвольная вещественная четная функция из } C_\infty & \text{при } |y| \leqslant m/2. \end{cases} \tag{4}$$

В двойственном пространстве $S(R^{4k})$, полученном действием обратного преобразования Фурье, функционал $g_n = F^{-1}(\alpha_n)$ является свертывателем, т. е.

$$\psi(x_1, \ldots, x_k) = (g_n * \varphi)(x_1, \ldots, x_k) \in S(R^{4k}),$$

$$\forall \varphi(x_1, \ldots, x_k) \in S(R^{4k}) \text{ и } D^m(g_n * \varphi) = g_n * D^m\varphi. \quad [22]$$

Здесь

$$D^m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_k^0}\right)^m.$$

В качестве $\Psi_{(n)}$ можно выбрать $E_\Omega^\perp \Phi(g_n * \varphi)$. Действительно

$$(P_0)^n \Psi_{(n)}(\psi) = i^n \Psi_{(n)}(D^n\psi),$$

так как

$$P_0 A(\varphi)\Omega = [P_0, A(\varphi)]\Omega = iA(D\varphi)\Omega.$$

Далее

$$i^n \Psi_{(n)}(D^n\psi) = i^n \widetilde{\Psi}_{(n)}(\widetilde{D^n\psi}).$$

Фурье-образ

$$D^n[g_n * \varphi](x_1, \ldots, x_k)\ \widetilde{[g_n * D^n\varphi]}(p_1, \ldots, p_k) =$$

$$= (-i)^n \left(\sum_{j=1}^k p_j^\circ\right) \alpha\left(\sum_{j=1}^k p_j^\circ\right) \widetilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_k) = (-i)^n \widetilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_k) \text{ при } \sum_{j=1}^k p_j^\circ \geqslant m.$$

Носитель $\widetilde{E_\Omega^\perp}\widetilde{\Phi}$ по переменной $\sum_{j=1}^k p_j$ лежит в $\overline{V_+^m}$ [19], поэтому $(P_0)^n \Psi_{(n)} = E_\Omega^\perp \Phi$ и т. д.

В случае массовой щели, т. е. когда минимальная масса отлична от нуля, имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Существует в предположении леммы 1:

$$\lim_{R\to\infty} (\Phi, j_0(f_R f_T)\Omega) = 0 \tag{5}$$

для любого квазилокального Φ.

Здесь f_R и f_T — вещественные финитные функции и

$$f_R(\vec{x}) \in D(R^3), \quad f_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & |\vec{x}| \leqslant R \\ 0, & |\vec{x}| > R + r, \end{cases} \tag{6}$$

$$f_T(x^0) \in D(R^1), \ \operatorname{supp} f_T \subset [-T, T], \quad \int f_T(x^\circ)\,dx^\circ = 1.$$

Согласно (2)

$$(\Phi, j_0(f_R f_T)\Omega) = (\Psi_{(1)}, P_0 j_0(f_R f_T)\Omega) = i\sum_{k=1}^3 \left(\Psi_{(1)}, j_k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f_R f_T\right)\Omega\right),$$

последнее равенство на основании свойств тока (а) и (в)

$$\left(\Psi, j_k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f_R f_T\right)\Omega\right) = \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^k} f_R(\vec{x})\,(\Psi, j_k(\vec{x}, f_T)\Omega).$$

Подынтегральное выражение, согласно [20], является непрерывной функцией $\vec{x}$. В случае массовой щели функция

$$|\vec{x}|^N (\psi, j_k(\vec{x}, f_T)\Omega) = |\vec{x}|^N (\psi, U(\vec{x}, 1)\, j_k(0, f_T)\Omega)$$

стремится к нулю при $|\vec{x}| \to \infty$ для всех $N > 0$, см. [21]. Иначе говоря, $(\psi, j_k(\vec{x}, f_T)\Omega) \in S(R^3)$, поэтому легко видеть, что $|(\Phi, j_0(f_R f_T)\Omega)|$ стремится к нулю с ростом R быстрее любой степени $\frac{1}{R}$.

Используя метод, предложенный в лекциях Робинсона [9], можем показать, что существует аналог формального интеграла $\int d^3x j_0(\vec{x}, x^0)$ — оператор заряда.

Рассмотрим билинейный функционал $B(\chi, \Phi)$, аргументы которого принадлежат плотному множеству локальных состояний

$$B(\chi, \Phi) = \lim_{R\to\infty} (\chi, j_0(f_R f_T)\Phi).$$

Этот предел существует, так как

$$(\chi, j_0(f_R, f_T)\Phi) = (\chi, [j_0(f_R f_T), A]\Omega) + (A^*\chi, j_0(f_R f_T)\Omega),$$

где $\Phi = A\Omega$, A — соответствующий полином по полям. Вследствие локальной коммутативности существует такое $\rho(A)$, что

$$\lim_{R\to\infty} (\chi, [j_0(f_R f_T), A]\Omega) = (\chi, [j_0(f_\rho f_T), A]\Omega),$$

а $\lim\limits_{R\to\infty} (A^*\chi, j_0(f_R f_T)\Omega) = 0$ согласно (5).

Построенный билинейный функционал удовлетворяет условию ограниченности $|B(\chi, \Phi)| \leqslant \|\chi\| \cdot C(\Phi)$, где $C(\Phi) = \|[j_0(f_\rho f_T), A]\Omega\|$. По непрерывности мы можем продолжить $B(\chi, \Phi)$ по первому аргументу. При любом фиксированном $\Phi \in D_0$ продолженный билинейный функционал B' является непрерывным линейным функционалом на $\mathfrak{H}$ и по теореме Рисса $B'(\chi, \Phi) = (\chi, \Psi)$.

Тем самым каждому $\Phi \in D_0$ однозначно и линейно сопоставляется некоторый вектор $\Psi \in \mathfrak{H}$. Оператор, осуществляющий это отображение, обозначим $Q(f_T)$. Область определения так построенного оператора совпадает с D_0. При $\forall\, \chi, \Phi \in D_0$

$$B(\chi, \Phi) = \lim_{k\to\infty} (\chi, j_0(f_R f_T)\Phi) = (\chi, Q(f_T)\Phi).$$

Оператор Q фактически не зависит от функций f_T класса D_T, определенных согласно (6). Действительно, рассмотрим f_{T_1} и f_{T_2} из классов D_{T_1} и D_{T_2} и пусть $T_1 \geqslant T_2$ и соответственно $D_{T_1} \supseteq D_{T_2}$. Введем

$$f_T(x^0) = \int_{-\infty}^{x^0} dy\, [(f_{T_1}(y) - f_{T_2}(y)].$$

Очевидно, $f_T(x^0) \in D_{T_1}$ и $\frac{d}{dx^0} f_T(x^0) = f_{T_1}(x^0) - f_{T_2}(x^0)$. Поэтому

$$j_0(f_R f_{T_1}) - j_0(f_R f_{T_2}) = j_0\left(f_R \frac{df_T}{dx^0}\right) = \sum_{k=1}^{3} j_k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} f_R f_T\right)$$

и

$$(\chi, Q(f_{T_1})\Phi) - (\chi, Q(f_{T_2})\Phi) = \lim_{R\to\infty}\left(\chi, \sum_{k=1}^{3} j_k\left(-\frac{\partial}{\partial x^k} f_R f_T\right)\Phi\right) = 0.$$

Таким образом, для доказательства существования оператора заряда с плотной областью определения, связанного с локальным сохраняющимся током, достаточно использовать трансляционную инвариантность, сильное спектральное условие и локальную коммутативность.

При вещественных основных функциях $f_R(\vec{x})$, $f_T(x)$ оператор $j_0(f_R f_T)$ на области D_0 локальных состояний является симметрическим, отсюда следует, что и Q — симметрический оператор, так как $B(\chi, \Phi) = \overline{B(\Phi, \chi)}$ при всех Φ, $\chi \in D_0$. Вопрос о самосопряженных расширениях Q будет рассмотрен отдельно.

Распространение результатов на теории типа Яффе [18] не требует изменений в рассуждениях. Результаты Борхерса и Рюэля [20, 21], которые мы используем, справедливы и в таких теориях. Повсюду основные функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ надо считать принадлежащими не $S(R^{4n})$, а пространству основных функций $\zeta(R^{4n})$, введенному Яффер. При этом, как известно, для любого открытого множества $\theta \subset R^{4n}$, L $(\theta\text{-}\zeta(R^{4n}) \subset D\ (\theta))$ плотно в $D\ (\theta)$. В качестве локальных состояний мы будем рассматривать вайтмановские полиномы по полям, сглаженным с основными функциями из $L(\theta)$. Заметим, что самосопряженное расширение Q может рассматриваться как генератор однопараметрической группы унитарных операторов, описывающих некоторую симметрию. Тем самым, отправляясь от локального сохраняющегося тока, возможно в случае массовой щели определить некоторое преобразование полей, которое будет симметрией, не нарушенной спонтанно, что является вариантом теоремы Голдстоуна.

Автор выражает благодарность проф. Д. Д. Иваненко и А. И. Наумову за неизменное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldstone J. Nuovo Cim., **19**, 154, 1961.
2. Goldstone J., Salam A., Weinberg S. Phys. Rev., **127**, 965, 1962.
3. Streater R. F. Proc. Roy. Soc., **287A**, 510, 1965.
4. Kastler D., Robinson D., Swieca A. Commun. Math. Phys., **2**, 108, 1966.
5. Symanzik K. Commun. Math. Phys., **6**, 228, 1967.
6. Ezawa H., Swieca A. Commun. Math. Phys., **5**, 330, 1967.
7. Streater R. F. Seminar on High Energy Physics and Elementary Particles, Trieste, 1965. IAEA, Vienna, 781, 1966.
8. Swieca A. Nuovo Cim., **52A**, 242, 1967.
9. Robinson D. CERN 66/1205/5—T. H. 708.
10. Coleman S. Phys. Lett., **19**, 144, 1965; J. Math. Phys., **7**, 787, 1966.
11. Dell'Antonio G. F. Nuovo Cim., **47A**, 1, 1967.
12. Fabri E., Picasso L. Phys. Rev. Lett., **16**, 408, 1966.
13. Schroer B., Stichel P. Commun. Math. Phys., **3**, 258, 1966.
14. Katz A. Nuovo Cim., **45A**, 721, 1966.
15. Swieca A. Phys. Rev. Lett., **17**, 974, 1966.
16. De Mottoni P. Nuovo Cim., **51A**, 128, 1967.
17. Стритер Р., Вайтман А. PCT, спин и статистика и всё такое. М., «Наука», 1966.
18. Jaffe A. M. Phys. Rev. Lett., **17**, 661, 1966.
19. Йост Р. М. Общая теория квантованных полей. М., «Мир», 1967.
20. Borchers H. Nuovo Cim., **33**, 1600, 1964.
21. Ruelle D. Helv. Phys. Acta, **35**, 147, 1962.
22. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. «Обобщенные функции», вып. 2, М., Физматгиз, 1958.

Поступила в редакцию
27.6 1968 г.

Кафедра
теоретической физики