Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1969

УДК 53:19.25

А. Д. БУРДЮГОВ

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТРУКТУРЕ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ С ЭЛЛИПСОИДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТЕЙ

В работе найдены два новых решения задачи о распределении плотности в гравитирующих системах частиц с осевой симметрией, учитывающие эллипсоидальность функции распределения по скоростям. Приведены формулы, позволяющие по данным наблюдений определить параметры оортовского вращения: «второй температуры» $\varkappa$ и угловой скорости вращения ω_0. На основании интегрального уравнения состояния Власова определены эффективные радиусы полученных цилиндрических образований.

При статистическом описании систем гравитирующих частиц с помощью шестимерных функций распределения вопрос о стационарном распределении потенциала и плотности в случае ньютоновского взаимодействия сводится к решению нелинейного уравнения [1—2]

$$\Delta\varphi + \lambda p(\bar{r})\, e^{\varphi} = 0, \qquad (1) \qquad \text{или} \qquad \Delta \ln \nu + \lambda\nu = \Delta \ln p(\vec{r}), \qquad (1')$$

где $\varphi = -\frac{m}{\theta} V$, $V(\bar{r})$ — гравитационный потенциал, $\nu = \frac{\rho(\bar{r})}{\rho^0}$, $\rho(\bar{r})$ — плотность частиц, $\lambda = 4\pi G \frac{m^2\rho_0}{\theta} = \alpha\rho_0$, θ, ρ_0 — произвольные постоянные, G — гравитационная постоянная. Коэффициент $p(\bar{r})$ учитывает характер отклонения функции распределения от Максвелл — Больцмановского распределения. Для систем с осевой (ротационной) симметрией, описываемых оортовской функцией распределения (в цилиндрической системе координат), запишем [1]

$$p(\bar{r}) = (1 + \varkappa R^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{\mu R^2}{1 + \varkappa R^2}, \qquad (2)$$

оператор Лапласа есть $\Delta = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\mu = \frac{m}{2\theta}\omega_0^2$; $\varkappa$ и ω_0 — произвольные постоянные, по отношению к которым функция распределения удовлетворяет условию статистической независимости [2]. Они характеризуют неоднородность температуры (эллипсоидальность) и скорость вращения соответственно.

Общее решение уравнения (1) с коэффициентом (2) для произвольных $\varkappa$ и μ неизвестно [3]. Можно рассмотреть частные случаи, задавая определенные значения $\varkappa$ или μ или связь между ними.

Точные решения известны лишь в простейших случаях:

1) $p(\bar{r}) = 1, \quad (\varkappa = 0, \ \mu = 0)$; 2) $p(\bar{r}) = \exp \frac{m}{2\theta} \omega_0^2 R^2, \quad (\varkappa = 0, \ \mu \neq 0)$.

Решения для первого случая, зависящие от одной переменной z или R (диск и волокно), рассматривались Власовым [1], второй случай соответствует твердотельному вращению с равномерным распределением плотности [4]. Эти решения дают осесимметричное распределение потенциала и плотности частиц при сферическом распределении остаточных скоростей ($\varkappa=0$). В этом сообщении получены точные решения уравнения (1) для более сложных случаев, когда

3) $p(\bar{r}) = (1 + \varkappa R^2)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $p(\bar{r}) = (1 + \varkappa R^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{5}{2} \cdot \frac{\varkappa R^2}{1 + \varkappa R^2}$,

$$(\varkappa \neq 0, \ \mu = 0) \quad \left(\varkappa \neq 0, \ \mu \neq 0, \ \mu = \frac{5}{2}\varkappa\right)$$

т. е. для собственно эллипсоидального распределения скоростей ($\varkappa \neq 0$).

§ 1. Система частиц с осевой симметрией при двух температурах без вращения

Уравнение для относительной плотности имеет вид

$$\Delta \ln \nu + \lambda \nu = \Delta \ln (1 + \varkappa R^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Частное решение легко получить, если обратить внимание на то, что подлогарифмическая функция правой части

$$p(R) \sim \left[\frac{8\varkappa}{\lambda} \cdot \frac{1}{(1 + \varkappa R^2)^2}\right]^{\frac{1}{4}} = (\nu_0)^{\frac{1}{4}},$$

где ν_0 — решение уравнения (1') для $p(R) = 1$, содержащее одну произвольную постоянную $\varkappa$, которая является параметром искомого уравнения (3). Тогда $\Delta \ln \nu + \lambda \nu = \frac{1}{4} \Delta \ln \nu_0$ и, полагая $\nu = c\nu_0$, получим $\frac{3}{4} \Delta \ln \nu_0 + \lambda c \nu_0 = 0$, т. е. $c = \frac{3}{4}$. Таким образом, $\nu = \frac{6\varkappa}{\lambda} \cdot \frac{1}{(1 + \varkappa R^2)^2}$ будет частным решением уравнения (3). Потенциал

$$\varphi = -\frac{3}{2} \ln (1 + \varkappa R^2) + \ln \frac{6\varkappa}{\lambda}.$$

Учитывая граничные условия на оси, получим $\frac{6\varkappa}{\lambda} = \frac{\rho_{(0)}}{\rho_0}$; т. е.

$$\varkappa = \frac{2}{3} \pi G \frac{m^2 \rho_{(0)}}{\theta}. \tag{4}$$

Условие нормировки $m \int\limits_{(\infty)} \rho(R) 2\pi R \, dR = mN_0 = M$ (где N_0 — число частиц на единицу длины цилиндра) дает $N_0 = \frac{6\pi}{\alpha}$, т. е.

$$\frac{GmM}{2\theta} = \frac{3}{4} \tag{5}$$

соотношение, аналогичное условию разрешимости Власова $\frac{GmM}{2\theta} = 1$ в случае $p(R) = 1$. Рассматривая найденное решение уравнения (3) и решение для $p(R) = 1$ как два состояния одной и той же системы с одинаковым N_θ, получим $\frac{3}{2}\frac{\theta_\varkappa}{Gm^2} = \frac{2\theta_0}{Gm^2}$, т. е. $\theta_\varkappa = \frac{4}{3}\theta_0$. Это состояние является более «горячим» и переход в него не совершается непрерывно. При одинаковых условиях на оси распределение плотности останется прежним.

Формулы (4) и (5) дают возможность эмпирически определить постоянную «второй температуры» $\varkappa$ и массу системы на единицу длины цилиндра M, зная дисперсию частиц по скоростям $\left(\frac{\theta}{m}\right)$ и плотность среды $m\rho(0)$, Власов ввел понятие интегрального уравнения состояния, полагая $N_0 = \rho(0)\pi R_{эф}^2$ [1—2], которое дает возможность найти определенный таким образом эффективный радиус цилиндра $\left(R_{эф} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right)$. Задавая $\frac{\theta}{m} \sim 5\cdot 10^{14}$ *см²·сек⁻²*; $m\rho(0) \sim 3\cdot 10^{-23}$ *г·см⁻³*, получим $\varkappa = 8{,}36\cdot 10^{-45}$ *см⁻²*; $R_{эф} \approx 3{,}6$ *кпс*.

§ 2. Система частиц с осевой симметрией при двух температурах с вращением

В общем случае следует решить уравнение

$$\Delta\varphi + \lambda(1+\varkappa R^2)^{-1/2} \exp\frac{\mu R^2}{1+\varkappa R^2}\, e^\varphi = 0$$

или

$$\Delta \ln \nu + \lambda\nu + \frac{2\varkappa + 4\mu}{(1+\varkappa R^2)^2} - \frac{8\mu}{(1+\varkappa R^2)^3} = 0. \tag{6}$$

Производя подстановку $\nu = f/(1+\varkappa R^2)^n$, получим

$$\Delta \ln f + \lambda\frac{f}{(1+\varkappa R^2)^n} - \frac{n4\varkappa}{(1+\varkappa R^2)^2} + \frac{2\varkappa+4\mu}{(1+\varkappa R^2)^2} - \frac{8\mu}{(1+\varkappa R^2)^3} = 0. \tag{6a}$$

Не трудно усмотреть, что $f = \text{const} = c$ будет решением этого уравнения при $n = 3$ в случае выполнения соотношения $-12\varkappa + 2\varkappa + 4\mu = 0$; т. е. $\mu = \frac{5}{2}\varkappa$. Для определения C запишем $\lambda c = 8\mu$; $c = \frac{8\mu}{\lambda} = \frac{20\varkappa}{\lambda}$; значит, $\nu = \frac{20\varkappa}{\lambda}\cdot\frac{1}{(1+\varkappa R^2)^3}$ (A) будет точным решением уравнения (6) при $\mu = \frac{5}{2}\varkappa$. Потенциал

$$\varphi = -\frac{5}{2}\ln(1+\varkappa R^2) - \frac{5}{2}\frac{\varkappa R^2}{1+\varkappa R^2} + \ln\frac{20\varkappa}{\lambda}.$$

Учитывая условия на оси, получим

$$\frac{20\varkappa}{\lambda} = \frac{\rho(0)}{\rho_0}\text{; т. е. } \varkappa = \frac{1}{5}\pi G\frac{m^2\rho(0)}{\theta}, \tag{7}$$

$$\mu = \frac{\pi G m^2\rho(0)}{2\theta}. \tag{8}$$

Квадрат угловой скорости вращения на оси в этом случае в два раза меньше такового для твердотельного вращения при $\rho = \text{const} = \rho(0)$, т. е.

$$\omega_0^2 = \pi G m\rho(0) = \frac{\omega^2}{2}. \tag{9}$$

Интегральное уравнение состояния дает

$$N_0 = \frac{10\pi}{\alpha} = \frac{5}{2}\frac{\theta}{Gm^2} = \rho(0)\,\pi R_{\text{эф}}^2, \quad R_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{2\varkappa}} \tag{10}$$

Рассматривая полученное решение как состояние системы с прежним числом частиц N_0 на единицу длины цилиндра, получим

$$\theta_\mu = \frac{4}{5}\theta_0 \left(\text{Условие разрешимости здесь } \frac{GmM}{2\theta} = \frac{5}{4}\right).$$

Это состояние будет менее «горячим» и при одинаковых условиях на оси $\varkappa_\mu = \frac{\varkappa_0}{2}$; $R_{\text{эф}}^{(\mu)} = R_{\text{эф}}^{(\varkappa)} = R_{\text{эф}}^{(0)}$.

Задавая прежние значения дисперсии и плотности на оси цилиндра, по формулам (7, 9, 10) получим

$$\varkappa = 2{,}51\cdot 10^{-45}\ \textit{см}^{-2};\quad \omega_0 = 2{,}45\cdot 10^{-15}\ \textit{сек}^{-1};\quad R_{\text{эф}} = 4{,}7\ \textit{кпс}.$$

Из наблюдений для Галактики $\varkappa = 2{,}49\cdot 10^{-45}$ *см*$^{-2}$; $\omega_0 = 2{,}36\cdot 10^{-15}$ *сек*$^{-1}$. Для системы частиц, описываемой распределением (А), можно ввести другое определение эффективного радиуса. В этом случае существует конечный момент инерции единицы длины цилиндра

$$I = \int_0^\infty mR^2\rho(R)\,2\pi R\,dR = m\frac{10\pi}{\alpha}\cdot\frac{1}{\varkappa} = mN_0\cdot\frac{1}{\varkappa}.$$

Момент инерции единицы длины однородного цилиндра радиуса R равен $I = mN_0\frac{R^2}{2}$; приравнивая эти выражения, получим $R'_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}$. При таком определении $N_0 = \rho_{\text{эф}}\pi R'^2_{\text{эф}}$ и $\rho_{\text{эф}} = \frac{1}{4}\rho(0)$; $R'_{\text{эф}} = 2R_{\text{эф}}$. Уравнение (6а) имеет еще одно специальное решение при $n = 3$, $f = -\frac{8\mu\varkappa}{\lambda}R^2$ будет решением при условии, что $-8\mu - 12\varkappa + 2\varkappa + 4\mu = 0$, т. е. $\mu = -\frac{5}{2}\varkappa$. Тогда

$$\nu = \frac{20\varkappa^2R^2}{(1+\varkappa R^2)^3};\quad \varphi(R) = -\frac{5}{2}\ln(1+\varkappa R^2) + \frac{5}{2}\frac{\varkappa R^2}{1+\varkappa R^2} + \ln\frac{20\varkappa^2R^2}{\lambda}.$$

Однако оно не может быть приложено к рассматриваемой задаче, так как $\mu > 0$, а при $\varkappa < 0$ оно теряет смысл для $R^2 \geqslant -\frac{1}{\varkappa}$. Тем не менее, являясь точным решением уравнения

$$\Delta\varphi + \lambda(1 + \varkappa R^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{5}{2}\frac{\varkappa R^2}{1+\varkappa R^2}\right\} e^{\varphi} = 0,$$

оно представляет самостоятельный интерес.

Полученные распределения[1], являющиеся бесконечными цилиндрами, ограниченными по радиусу (в смысле $\rho \to 0$, $R \to \infty$), наряду со случаем $p(R) = 1$ удовлетворяют теореме о вириале в применении к единице длины цилиндра в форме

$$\int\limits_{(\infty)} \overline{v_{\perp}^2}\, \rho(R)\, 2\pi R\, dR - \int\limits_{(\infty)} R \frac{\partial V}{\partial R} \rho(R)\, 2\pi R\, dR = 0.$$

$\overline{v_{\perp}^2}$ — средняя квадратичная скорость частиц в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. При этом кинетическая энергия движения в направлении, перпендикулярном оси цилиндра, приходящаяся на единицу длины, зависит от θ и N_0 таким образом, что, учтя однозначную связь между θ и N_0, для всех трех случаев, включая $p(R) = 1$, получим

$$T_{\perp} = \frac{Gm^2N_0^2}{2} = \frac{GM^2}{2}.$$

Выражаю глубокую благодарность проф. А. А. Власову за предложенную тему и обсуждение решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. В сб. «Труды шестого совещания по вопросам космогонии». М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., «Наука», 1966.
3. Огородников К. Д. «Астрон. журнал», 35, № 3, 408, 1958.
4. Огородников К. Д. Динамика звездных систем. М., Гостехиздат, 1958.

Поступила в редакцию
12.7 1968 г.

Кафедра
теоретической физики

[1] Приведенные оценки для двухтемпературной системы с вращением при аппроксимации полученного распределения на Галактику следует рассматривать как подтверждение значения центральной плотности $m\rho(0)$ [4] и уточнение радиальной дисперсии $\left(\frac{\theta}{m}\right)$ по известным из наблюдений значениям χ и ω_0.