ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 2 — 1969

УДК 521.401

С. Г. ЖУРАВЛЕВ

ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ СИНХРОННОГО СПУТНИКА, ДВИГАЮЩЕГОСЯ В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ

Получены вековые и периодические возмущения первого порядка кеплеровских элементов орбиты, вызываемые трехосностью Земли. Приводится числовой пример.

Влиянию нецентральности поля тяготения Земли на движение искусственного спутника Земли в случае несоизмеримости средних движений посвящено большое количество работ [1, 2, 3, 4].

В этой статье мы выводим аналитические формулы для возмущений первого порядка кеплеровских элементов орбиты спутника, невозмущенное среднее движение которого равно угловой скорости вращения Земли.

§ 1. Разложение возмущающей функции

Пусть спутник нулевой массы движется в гравитационном поле Земли, равномерно вращающейся вокруг одной из своих главных центральных осей инерции. Выберем такую прямоугольную систему координат $OXYZ$ с началом в центре масс Земли, чтобы ее оси совпали с главными осями инерции Земли, а ось OZ являлась осью вращения Земли.

Если в разложении потенциала Земли сохранить лишь моменты инерции второго порядка, то будем иметь

$$V = V_0 + R, \tag{1}$$

где

$$V_0 = \frac{fM}{r},$$

$$R = \frac{f}{2r^5}\left[(B + C - 2A)\,x^2 + (C + A - 2B)\,y^2 + (A + B - 2C)\,z^2\right].$$

Здесь f — постоянная тяготения, M — масса Земли, A, B, C — главные центральные моменты инерции Земли и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В выражении (1) V_0 определяет невозмущенное движение спутника, а функция R играет роль возмущающей функции. Переходя от прямоугольных координат к кеплеровским элементам, возмущающую функцию R можно представить в виде [1]

$$R = \frac{fM}{r^3}\left\{\gamma\left[1-\frac{3}{2}\sin^2 i+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2u\right]+\right.$$

$$\left.+\gamma'\left[\frac{1}{2}\sin^2 i\cos 2\overline{\Omega}+\cos^4\frac{i}{2}\cos 2(u+\overline{\Omega})+\sin^4\frac{i}{2}\cos 2(u-\overline{\Omega})\right]\right\}, \qquad (2)$$

где

$$\gamma = \frac{2C-A-B}{4M}, \quad \gamma' = \frac{3}{4}\,\frac{B-A}{M}, \qquad (3)$$

а r — радиус-вектор, u — аргумент широты, i — наклонность орбиты к плоскости экватора ($Z=0$) и $\overline{\Omega}$ — долгота узла орбиты, отсчитываемая от подвижной оси OX.

Если моменты инерции равномерно вращающейся Земли не равны между собой, то функция R явно зависит от времени посредством $\overline{\Omega}$, так как

$$\overline{\Omega} = \Omega - \widetilde{\lambda} - m(t-t_0), \qquad (4)$$

где

$\widetilde{\lambda}$ — угол между плоскостью XOZ и некоторой фиксированной меридианальной плоскостью,

Ω — угловое расстояние узла от фиксированной меридиональной плоскости в момент времени $t=t_0$, m—угловая скорость вращения Земли.

Чтобы вывести аналитические формулы для возмущений элементов, мы заменим в функции R время t невозмущенной истинной аномалией v, пользуясь соотношением

$$t-\tau = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{n}\int_0^v \frac{dv}{(1+e\cos v)^2}, \qquad (5)$$

где τ — момент прохождения спутника через перигей,

e — эксцентриситет невозмущенной орбиты,

n — среднее движение спутника.

Учитывая, что для синхронного спутника $m:n=\nu=1$, после замены t на истинную аномалию v, получим:

$$R = \frac{fM}{r^3}\gamma\left\{1-\frac{3}{2}\sin^2 i+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2u\right\}+$$

$$+\frac{fM}{r^3}\gamma'\left\{\frac{1}{2}\sin^2 i\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k^{(2)}\cos[(k-2)v+2(\Omega+\theta)]+\right.$$

$$+\cos^4\frac{i}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k^{(2)}\cos[2u+(k-2)v+2(\Omega+\theta)]+$$

$$\left.+\sin^4\frac{i}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k^{(-2)}\cos[2u-(k-2)v-2(\Omega+\theta)]\right\}, \qquad (6)$$

где

$$\theta = m(t_0-\tau)-\widetilde{\lambda}.$$

Так как для синхронного спутника ν не является малой величиной ($\nu=1$), то коэффициенты g_k^i представляются рядами по степеням только эксцентриситета e, а не по степеням ν и e, как это имело место для близких спутников [1]. С точностью до e^3 включительно имеем

$$g_0^{(j)} = 1 - j^2e^2, \qquad (j = \pm 2)$$

$$g_1^{(j)} = je + \frac{3}{8} j^2e^3 - \frac{1}{2} j^3e^3, \quad g_{-1}^{(j)} = -je + \frac{3}{8} j^2e^3 + \frac{1}{2} j^3e^3,$$

$$g_2^{(j)} = -\frac{3}{8} je^2 + \frac{1}{2} j^2e^2, \quad g_{-2}^{(j)} = \frac{3}{8} je^2 + \frac{1}{2} j^3e^2, \tag{7}$$

$$g_3^{(j)} = \frac{1}{6} je^3 - \frac{3}{8} j^2e^3 + \frac{1}{6} j^3e^3, \quad g_{-3}^{(j)} = -\frac{1}{6} je^3 - \frac{3}{8} j^2e^3 - \frac{1}{6} j^3e^3.$$

§ 2. Возмущения первого порядка

Возмущения первого порядка δa, δe, δi, $\delta\Omega$, $\delta\pi$ и $\delta\varepsilon$ кеплеровских оскулирующих элементов определяются квадратурами [1]:

$$\delta a = \int \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \frac{r^2}{\sqrt{fMp}} dv + C_1,$$

$$\delta e = -\int \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right\} \frac{r^2}{\sqrt{fMp}} dv + C_2,$$

$$\delta i = -\int \left\{ \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \right\} \frac{r^2}{\sqrt{fMp}} dv + C_3, \tag{8}$$

$$\delta\Omega = \int \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \frac{r^2}{\sqrt{fMp}} dv + C_4,$$

$$\delta\pi = \int \left\{ \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \right\} \frac{r^2}{\sqrt{fMp}} dv + C_5,$$

$$\delta\varepsilon = \int \left\{ -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e} \right\} \frac{r^2}{\sqrt{fMp}} dv + C_6,$$

где

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \quad p = a(1 - e^2),$$

а C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — постоянные интегрирования.

Следует заметить, что при вычислении частных производных R по элементам не нужно учитывать зависимость коэффициентов g_k^i и явно входящей в функцию R истинной аномалии v от элементов. Это обусловлено тем, что частные производные R по элементам должны вычисляться, вообще говоря, до замены времени t на невозмущенную истинную аномалию v.

Подставляя в формулы (8) частные производные возмущающей функции R и производя интегрирование, получим:

$$\delta a = \{\delta a\}_\gamma + \{\delta a\}_{\gamma'} + \frac{\gamma' a^2}{p^3}\left\{-\frac{9}{2} e^2 \sin^2 i \sin\lambda_0 \cdot v + \right.$$

$$+ \sin^4 \frac{i}{2}\left[\frac{5}{2} e^2 \cos(2v - \lambda_1) + \left(1 - \frac{11}{2} e^2\right)\cos(4v - \lambda_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{29}{6} e^2 \cos(6v - \lambda_1)\right] + \cos^4 \frac{i}{2}\left[-4\left(1 - \frac{11}{2} e^2\right)\sin\lambda_2 \cdot v + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{29}{2} e^2 \cos(2v + \lambda_2) - \frac{5}{4} e^2 \cos(2v - \lambda_2)\right]\right\} + C_1, \tag{9}$$

$$\delta e = \{\delta e\}_\gamma + \{\delta e\}_{\gamma'} + \frac{\gamma'}{p^2}\left\{\sin^2 i\left[-\frac{9}{4} e \sin\lambda_0 \cdot v + \right.\right.$$

$$+ \frac{45}{8} e^2 \cos(v + \lambda_0) - \frac{3}{8}(2 - 13e^2)\cos(v - \lambda_0) +$$

$$\left. + \frac{1}{8}(2 - 9e^2)\cos(3v - \lambda_0) + \frac{3}{4} e^2 \cos(5v - \lambda_0)\right] +$$

$$+ \sin^4 \frac{i}{2}\left[\frac{5}{4} e^2 \cos(v - \lambda_1) + \frac{1 - 2e^2}{6}\cos(3v - \lambda_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{14 - 29e^2}{20}\cos(5v - \lambda_1) + \frac{11}{7} e^2 \cos(7v - \lambda_1)\right] +$$

$$+ \cos^4 \frac{i}{2}\left[e \sin\lambda_2 \cdot v + \frac{14 - 29e^2}{4}\cos(v + \lambda_2) - \frac{1 - 2e^2}{2}\cos(v - \lambda_2) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{11}{3} e^2 \cos(3v + \lambda_2) - \frac{5}{12} e^2 \cos(3v - \lambda_2)\right]\right\} + C_2, \tag{10}$$

$$\delta i = \{\delta i\}_\gamma = \{\delta i\}_{\gamma'} + \frac{\gamma'}{p^2}\sin i\left\{\frac{9}{4} e^2 \sin\lambda_0 \cdot v + \frac{1 - 4e^2}{2}\cos(2v - \lambda_0) + \right.$$

$$+ \frac{7}{16} e^2 \cos(4v - \lambda_0) + \sin^2 \frac{i}{2}\left[\frac{7}{8} e^2 \cos(2v - \lambda_1) + \frac{1 - 4e^2}{4}\cos(4v - \lambda_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8} e^2 \cos(6v - \lambda_1)\right] - \cos^2 \frac{i}{2}\left[-(1 - 4e^2)\sin\lambda_2 \cdot v + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{9}{8} e^2 \cos(2v + \lambda_2) - \frac{7}{8} e^2 \cos(2v - \lambda_2)\right]\right\} + C_3, \tag{11}$$

$$\delta\Omega = \{\delta\Omega\}_\gamma + \{\delta\Omega\}_{\gamma'} + \frac{\gamma'}{p^2}\left\{\cos i\left[\frac{9}{4} e^2 \cos\lambda_0 \cdot v + \frac{1 - 4e^2}{2}\sin(2v - \lambda_0) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{7}{16} e^2 \sin(4v - \lambda_0)\right] + \sin^2 \frac{i}{2}\left[\frac{7}{8} e^2 \sin(2v - \lambda_1) + \frac{1 - 4e^2}{4}\sin(4v - \lambda_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8} e^2 \sin(6v - \lambda_1)\right] - \cos^2 \frac{i}{2}\left[(1 - 4e^2)\cos\lambda_2 \cdot v + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{9}{8} e^2 \sin(2v + \lambda_2) + \frac{7}{8} e^2 \sin(2v - \lambda_2)\right]\right\} + C_4, \tag{12}$$

$$\delta\pi = \{\delta\pi\}_\gamma + \{\delta\pi\}_{\gamma'} + \frac{\gamma'}{p^2}\left\{\sin^2 i\left[\frac{18 - 17e^2}{8}\cos\lambda_0 \cdot v + \right.\right.$$

$$+ \frac{21}{8} e \sin(v + \lambda_0) + \frac{3}{4e}\sin(v - \lambda_0) +$$

$$+ \frac{29}{32} e^2 \sin(2v + \lambda_0) + \frac{3 - 5e^2}{4}\sin(2v - \lambda_0) + \frac{2 - 5e^2}{8e}\sin(3v - \lambda_0) -$$

$$-\frac{6-17e^2}{32}\sin(4v-\lambda_0)+\frac{3}{20}e\sin(5v-\lambda_0)-\frac{5}{96}e^2\sin(6v-\lambda_0)\Big]+$$

$$+\sin^4\frac{i}{2}\Big[-\frac{34}{3}e^2\cos\lambda_1\cdot v-\frac{5}{4}e\sin(v-\lambda_1)+\frac{12-109e^2}{24}\sin(2v-\lambda_1)-$$

$$-\frac{1-7e^2}{6e}\sin(3v-\lambda_1)-\frac{12-31e^2}{16}\sin(4v-\lambda_1)+\frac{14-33e^2}{20e}\sin(5v-\lambda_1)+$$

$$+\frac{60-25e^2}{36}\sin(6v-\lambda_1)+\frac{11}{7}e\sin(7v-\lambda_1)\Big]+$$

$$+\cos^4\frac{i}{2}\Big[-\frac{10-63e^2}{2}\cos\lambda_2 v+\frac{14-53e^2}{4e}\sin(v+\lambda_2)-\frac{2+23e^2}{4e}\sin(v-\lambda_2)+$$

$$+\frac{120-187e^2}{24}\sin(2v+\lambda_2)+\frac{12+67e^2}{24}\sin(2v-\lambda_2)-e\sin(3v+\lambda_2)+$$

$$+\frac{23}{12}e\sin(3v-\lambda_2)+\frac{63}{48}e^2\sin(4v+\lambda_2)-\frac{13}{16}e^2\sin(4v-\lambda_2)\Big]+$$

$$+\cos i\sin^2\frac{i}{2}\Big[\frac{9}{2}e^2\cos\lambda_0\cdot v+(1-4e^2)\sin(2v-\lambda_0)+\frac{7}{8}e^2\sin(4v-\lambda_0)\Big]-$$

$$-\sin^2 i\Big[\frac{1-4e^2}{2}\cos\lambda_2\cdot v+\frac{9}{16}e^2\sin(2v+\lambda_2)+\frac{7}{16}e^2\sin(2v-\lambda_2)\Big]\Big\}+C_5, \tag{13}$$

$$\delta\varepsilon=\{\delta\varepsilon\}_\gamma+\{\delta\varepsilon\}_{\gamma'}+\frac{\gamma'}{p^2}\Big\{\sin^2 i\Big[\frac{63}{8}e^2\cos\lambda_0\cdot v+\frac{63}{8}e\sin(v-\lambda_0)+$$

$$+\frac{12-51e^2}{8}\sin(2v-\lambda_0)-\frac{11}{8}e\sin(3v-\lambda_0)+\frac{39}{32}e^2\sin(4v-\lambda_0)\Big]+$$

$$+\sin^4\frac{i}{2}\Big[\frac{29}{4}e^2\sin(2v-\lambda_1)-\frac{49}{12}e\sin(3v-\lambda_1)+\frac{16-75e^2}{8}\sin(4v-\lambda_1)+$$

$$+\frac{87}{20}e\sin(5v-\lambda_1)+\frac{23}{6}e^2\sin(6v-\lambda_1)\Big]+\cos^4\frac{i}{2}\Big[\frac{12-59e^2}{2}\cos\lambda_2\cdot v+$$

$$+\frac{67}{4}e\sin(v+\lambda_2)+\frac{37}{4}e\sin(v-\lambda_2)+\frac{37}{4}e^2\sin(2v+\lambda_2)+$$

$$+\frac{11}{2}e^2\sin(2v-\lambda_2)\Big]+\cos i\sin^2\frac{i}{2}\Big[\frac{9}{2}e^2\cos\lambda_0\cdot v+(1-4e^2)\sin(2v-\lambda_0)+$$

$$+\frac{7}{8}e^2\sin(4v-\lambda_0)\Big]-\sin^2 i\Big[\frac{1-4e^2}{2}\cos\lambda_2\cdot v+$$

$$+\frac{9}{16}e^2\sin(2v+\lambda_2)+\frac{7}{16}e^2\sin(2v-\lambda_2)\Big]\Big\}+C_6, \tag{14}$$

где

$$\lambda_0=2(\Omega+\theta),\quad \lambda_1=2(\Omega-\omega+\theta),\quad \lambda_2=2(\Omega+\omega+\theta).$$

В формулах (9)—(14) $\{\delta a\}_\gamma$, $\{\delta e\}_\gamma$, $\{\delta i\}_\gamma$, $\{\delta\Omega\}_\gamma$, $\{\delta\pi\}_\gamma$ и $\{\delta\varepsilon\}_\gamma$ представляют собой возмущения элементов первого порядка, вызванные полярным сжатием Земли, а $\{\delta a\}_{\gamma'}$, $\{\delta e\}_{\gamma'}$, $\{\delta i\}_{\gamma'}$, $\{\delta\Omega\}_{\gamma'}$, $\{\delta\pi\}_{\gamma'}$ и $\{\delta\varepsilon\}_{\gamma'}$ — периодические возмущения, вызванные экваториальным сжатием Земли и совпадающие с полученными в работе [1]. Возмущения, вызванные полярным сжатием Земли, получены многими авторами и поэтому здесь не приводятся.

Известно [1], что среди возмущений, вызванных полярным сжатием Земли, вековые члены имеются только в элементах Ω, π и ε, а среди возмущений, обусловленных экваториальным сжатием Земли, вековые члены отсутствуют во всех шести элементах кеплеровской орбиты при несоизмеримости среднего движения спутника и угловой скорости вращения Земли (нерезонансный случай). Для синхронного спутника имеет место соизмеримость $m:n=1:1$ (резонансный случай) и поэтому вековые члены появляются, как это видно из формул (9)—(14), во всех шести элементах кеплеровской орбиты.

Следует отметить, что при малых e точность определения периодических возмущений для элемента π ниже, чем для остальных элементов орбиты. Этот известный факт обусловлен тем, что в $\delta\pi$ отдельные коэффициенты при периодических членах имеют e в знаменателе.

Пример. Произведем расчет возмущений, обусловленных экваториальным сжатием Земли, для орбиты американского синхронного спутника Земли «Синком III»: $a=42\,685$ *км*, $e=0{,}0373$, $i=0°{,}25$, $p=42\,625$ *км*, $T=24^h09^m$.

Обозначим вышеназванные возмущения через Δa, Δe, Δi, $\Delta\Omega$, $\Delta\pi$ и $\Delta\varepsilon$. Для упрощения расчета примем $t_0=\tau=0$ и $\Omega=\omega=0$. Численное значение величин γ' и $\widetilde{\lambda}$ найдем из работы [5].

После вычислений получим

$$\Delta a = -13{,}3v + 9{,}4\cos(v+13°) + 2{,}8\cos(v-13°) + $$
$$+ 0{,}3\cos(2v+13°) - 0{,}3\cos(2v-13°);$$

$$\Delta e = 3\cdot10^{-9}v + 1{,}3\cdot10^{-6}\cos(v+13°) - 0{,}2\cdot10^{-6}\cos(v-13°);$$

$$\Delta i \approx 0;$$

$$\Delta\Omega = -0'',07v + 0'',04\sin(2v-13°) - 0'',01\sin(v+13°) + 0'',01\sin(v-13°);$$

$$\Delta\pi = -0'',35v + 6'',7\sin(v+13°) - 1'',0\sin(v-13°) + 0'',4\sin(2v+13°);$$

$$\Delta\varepsilon = 0'',42v + 0'',45\sin(v+13°) + 0'',35\sin(v-13°),$$

причем коэффициенты периодических возмущений в большой полуоси даны в метрах. Из примера и формул (12) и (13) видно, что восходящий узел орбиты синхронного спутника перемещается под влиянием экваториального сжатия Земли с востока на запад, а перигей орбиты под влиянием экваториального сжатия Земли эволюционирует в направлении, противоположном направлению движения спутника по орбите. Следовательно, экваториальное сжатие Земли оказывает на перигей орбиты синхронного спутника влияние, противоположное влиянию полярного сжатия Земли, которое, как известно, вызывает эволюцию перигея орбиты в направлении, совпадающем с направлением движения спутника по орбите.

Выражаю благодарность док. физ.-мат. наук Е. А. Гребеникову, а также доц. Е. П. Аксенову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П. «Бюлл. ИТА», 7, 10, 1960.
2. Sehnal L. «Bull. Astron. Inst. of Czech.», 11, 3, 1960.
3. Cook G. E. «Planet and space sci.», 11, 7, 1963.
4. Allan R. R. «Proc. of the Royal society», 288A, 1412, 1965.
5. Жонголович И. Д. «Бюлл. ИТА», 6, 8, 1957.

Поступила в редакцию
1.4 1968 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии