Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1969

УДК 53:51

Л. Д. АКУЛЕНКО

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ

На основе знакоопределенной периодической фазовой траектории строятся возмущенные вращательные решения и исследуется их устойчивость по Ляпунову.

Исследование фазовых траекторий. В работе [1] указаны достаточные условия существования и орбитальной устойчивости точного вращательного решения возмущенного уравнения вида

$$\ddot{x} + Q(x) = \varepsilon q(x, \dot{x}; \varepsilon), \tag{1}$$

где $\varepsilon \geqslant 0$ — малый параметр, x — одномерная вещественная координата, $\dot{x} \equiv dx/dt$, $t \in (-\infty, \infty)$ — независимая переменная. Отметим, что асимптотически аналогичные вращательные и колебательные системы рассматривались в [2, 3] и др.

На фазовой плоскости автономное уравнение (1) можно записать в форме, не содержащей независимую переменную t:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q(x)}{y} + \frac{\varepsilon}{y} q(x, y; \varepsilon), \tag{2}$$

где $y = \dot{x}$, $|\dot{x}| < \infty$. Решения этого уравнения называют траекториями в фазовом пространстве $R^{(2)}$ или фазовыми траекториями.

Наряду с основным, возмущенным уравнением (2) будем также рассматривать порождающее: $dy_0/dx = -Q(x)/y_0$, решение которого — невозмущенная фазовая траектория, отвечающая вращательному режиму, легко находится: $y_0 = y_0(x, E_0) = \pm(2[E_0 - U(x)])^{1/2}$, где E_0 — постоянная «невозмущенной энергии» удовлетворяет условию $E_0 > U$ для всех вещественных x. Функции Q и q предполагаются равномерно периодическими по x с постоянным периодом 2π, причем Q имеет нулевое среднее. Очевидно, фазовую траекторию можно построить при выполнении требования лишь непрерывности функции $Q(x)$.

Часто бывает удобнее и проще исследовать поведение возмущенной фазовой траектории, если трудно получить решение порождающего уравнения (1) в явном виде. В частности, вопрос устойчивости стационарного вращательного решения, вычисление возмущенного периода и амплитуд скорости могут быть решены исследованием периодической фазовой траектории.

Будем строить периодическое решение уравнения (2) при следующих предположениях относительно функций Q и q: 1) функция Q непрерывна и периодична по аргументу x с периодом 2π и нулевым средним значением на этом промежутке; 2) функция q непрерывна и равномерно периодична по x с периодом 2π, причем по y и ε она допускает частные производные, удовлетворяющие условиям Лифшица с независящими от x постоянными.

Далее, если E_0^* — вещественный корень уравнения

$$L(E_0) = \int_0^{2\pi} q(x, y_0(x, E_0); 0)\, dx = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющий условиям:

1. $E_0^* \geqslant \max U(x) + \alpha \quad (x \in [0, 2\pi];\ \alpha > 0),$ (4)

2. $dL/dE_0^* \neq 0,$ (5)

то справедлива следующая теорема: если выполняются условия 1 и 2 для вещественного корня E_0^*, а функции Q и q удовлетворяют перечисленным выше требованиям периодичности и гладкости, то существует при достаточно малых значениях ε единственная в известном смысле периодическая фазовая траектория $y = y(x, E_0^*, \varepsilon)$, принадлежащая области G определения уравнения (2) и обращающаяся в $y_0 = \pm (2\,[E_0^* - U(x)])^{1/2}$ при $\varepsilon = 0$. Эта возмущенная фазовая траектория асимптотически устойчива для $x \geqslant x^0$ при условии $dL/dE_0^* < 0$ и неустойчива, если имеет место противоположное неравенство.

Докажем утверждения теоремы. Полагая $y = y_0(x, E_0) + \varepsilon Y$, где Y — периодическая периода 2π неизвестная функция, уравнения (2) можно привести к виду

$$\frac{dY}{dx} = \frac{Q}{y_0^2} Y + \frac{q_0(x, y_0)}{y_0} + \varepsilon \left[-\frac{Q}{y_0^3} Y^2 + \frac{(q_y')_0}{y_0} Y - \frac{q_0}{y_0^2} Y + \frac{(q_\varepsilon')_0}{y_0} + \Phi(x, Y; \varepsilon) \right], \tag{6}$$

где $\Phi(x, Y; \varepsilon)$ — известная достаточно гладкая функция в некоторой области g переменной Y и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ равномерно относительно всех вещественных x, причем $\Phi(x, Y, 0) \equiv 0$. Решение уравнения (6) будем искать последовательными приближениями. Нулевое по ε приближение периодического решения определим из уравнения

$$\frac{dY_0}{dx} - \frac{Q(x)}{y_0^2} Y_0 = \frac{q_0(x, y_0)}{y_0}. \tag{7}$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{du}{dx} - \frac{Q(x)}{y_0^2} u = 0, \tag{8}$$

частное периодическое решение которого запишем так: $u = 1/y_0$. Уравнение, сопряженное (8): $du^*/dx + Q(x) u^*/y_0^2 = 0$ — тоже имеет частное периодическое решение вида $u^* = y_0$, причем $uu^* = 1$.

Условие существования периодического решения у неоднородного уравнения (7) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} q_0 \cdot \left(\frac{u^*}{y_0}\right) dx = \int_0^{2\pi} q_0 (x, y_0 (x, E_0))\, dx = 0$$

и совпадает с (3). Пусть теперь E_0^* — вещественный корень этого уравнения, удовлетворяющий условию 1. Тогда полное периодическое решение имеет вид

$$Y_0 = M_0 u + u \int_0^x q_0 \cdot \left(\frac{u^*}{y_0}\right) dx_1 \equiv M_0 u + Y_0^*,$$

где M_0 — пока произвольная постоянная, которой надо распорядиться так, чтобы следующее приближение получилось также периодическим. Его определим из следующего уравнения:

$$\frac{dY_1}{dx} - \frac{Q(x)}{y_0^2} Y_1 = \frac{q_0}{y_0} + \varepsilon \left\{ -\frac{Q(x)}{y_0^3} Y_0^2 + \left[\frac{(q_y')_0}{y_0} - \frac{q_0}{y_0^2} \right] Y_0 + \frac{(q_\varepsilon')_0}{y_0} \right\}.$$

Аналогично предыдущему получим:

$$Y_1 = M_1 u + Y_0^* + \frac{\varepsilon}{y_0} \int_0^x \left\{ -\frac{Q(x_1)}{y_0^2} Y_0^2 + \left[(q_y')_0 - \frac{q_0}{y_0} \right] Y_0 + (q_\varepsilon')_0 \right\} dx_1.$$

Условие периодичности Y_1 является определяющим уравнением для M_0, из которого находим

$$M_0^* = -\left(\frac{dL}{dL_0^*}\right)^{-1} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(q_y')_0}{y_0} \int_0^x q_0 dx_1 + (q_\varepsilon')_0 \right] dx,$$

конечно, если E_0^* удовлетворяет условию 2 теоремы. Далее, произвольной пока постоянной M_1 надо распорядиться так, чтобы второе приближение оказалось периодическим.

Второе и последующие приближения Y будем определять по общей схеме:

$$\frac{dY_i}{dx} - \frac{Q(x)}{y_0^2} Y_i = \frac{q_0}{y_0} + \varepsilon \left\{ -\frac{Q(x)}{y_0^3} Y_{i-1}^2 + \left[\frac{(q_y')_0}{y_0} - \frac{q_0}{y_0^2} \right] Y_{i-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(q_\varepsilon')_0}{y_0} + \Phi(x, Y_{i-1}, \varepsilon) \right\}. \qquad (i \geqslant 2).$$

Периодическое решение каждого уравнения при фиксированном i определено с точностью до $M_i u$, где постоянная M_i определяется из условия периодичности Y_{i+1}, т. е. из соотношения вида

$$F_{i+1}(M_i, E_0^*, \varepsilon) = M_i \frac{dL}{dE_0^*} + \int_0^{2\pi} \left\{ (q_y')_0 Y_i^* + (q_\varepsilon')_0 + \Phi(x, Y_i; \varepsilon) + \right.$$

$$+ \varepsilon Y_i \left[-\frac{Q(x)}{y_0^3} Y_{i-1}^2 + \left(\frac{(q_y')_0}{y_0} - \frac{q_0}{y_0^2} \right) Y_{i-1} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(q_\varepsilon')_0}{y_0} + \Phi(x, Y_{i-1}; \varepsilon) \right] \right\} dx = 0.$$

Так как

$$\left. \frac{\partial F_{i+1}}{\partial M_i} \right|_{\varepsilon=0,\ M_i = M_0^*} = \frac{dL}{dE_0^*} \neq 0,$$

то по теореме о неявных функциях существует решение $M_i(E_0^*, \varepsilon)$ этого уравнения при ε достаточно малом и такое, что $M_i(E_0^*, 0) = M_0^*$. Практически эти корни ($i \geqslant 1$) можно находить приближенно с помощью обычных итераций.

Таким образом, задачу построения периодической фазовой траектории, удовлетворяющей уравнению (2), можно считать решенной, так как уравнение (6) является частным случаем системы, для которой в [4] соответствующее обоснование проведено детально.

Исследуем устойчивость по Ляпунову периодического решения $y(x, E_0^*, \varepsilon)$. Из уравнения в вариациях в форме Пункаре

$$\frac{d\xi}{dx} - \frac{Q(x)}{y^2}\xi - \frac{\varepsilon}{y}\frac{\partial q}{\partial y}\xi + \frac{\varepsilon}{y^2} q\xi = 0$$

получим

$$\xi = C \exp\left\{ \int_0^x \left[\frac{Q(x_1)}{y^2} - \frac{\varepsilon}{y^2} q + \frac{\varepsilon}{y}\frac{\partial q}{\partial y} \right] dx_1 \right\} =$$

$$= C \left[\frac{y(0, E_0^*, \varepsilon)}{y(x, E_0^*, \varepsilon)} \right] \exp\left\{ \varepsilon \int_0^x \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dx_1}{y} \right\}.$$

Отсюда очевидно, что $\xi \to 0$ при $x \to \infty$, если $|\xi(x + 2\pi)/\xi(x)| < 1$. Итак, возможны случаи: 1) $\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_0 \frac{dx}{y_0} \lesseqgtr 0$ — тогда имеет место асимптотическая устойчивость фазовой траектории для $x \geqslant x^0$; 2) случай $\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_0 \times \frac{dx}{y_0} = 0$ исключается условием (5) теоремы и требует дополнительного исследования, которое, как правило, приводит к кратным корням E_0^* или вращениям высших степеней (см. [1]).

В результате утверждения теоремы можно считать доказанными.

Замечание 1. Периодическую фазовую траекторию можно определить также из неявного соотношения

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E + \varepsilon \int_0^x q(x_1, \dot{x}; \varepsilon)\, dx_1, \tag{9}$$

где E — некоторая постоянная, обращающаяся в E_0 при $\varepsilon = 0$. Это интегральное уравнение относительно $\dot{x}$ вместе с условием периодичности

$q(x, \dot{x};\ \varepsilon)\,dx = 0$, выражающим требование равенства нулю работы возмущающих сил за время одного оборота (за цикл), полностью определяет периодическую фазовую траекторию и соответствующее ей значение E.

Покажем, как практически это сделать. Полагаем

$$\dot{x}(x, \varepsilon) = \dot{x}_0(x, E_0) + \varepsilon v, \quad E(\varepsilon) = E_0 + \varepsilon A,$$

где $x_0(x, E_0) = \pm(2[E_0 - U(x)])^{1/2}$, а функции v и A удовлетворяют условиям Липшица по ε и непрерывно дифференцируемы по x. Получим уравнение

$$v = \dot{x}_0^{-1}(x, E_0)\left\{\int_0^x q_0(x_1, \dot{x}_0(x_1, E_0))\,dx_1 + A(\varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\left[-\frac{v^2}{2} + \int_0^x \left((q'_{\dot{x}})_0 v + (q'_\varepsilon)_0 + q^*(x_1, v;\ \varepsilon)\right)dx_1\right]\right\}, \tag{10}$$

в котором функция q^* имеет порядок ε. Периодическое решение будем строить последовательными приближениями и, в частности, нулевое приближение v определим из соотношения

$$v_0 = \dot{x}_0^{-1}\left[\int_0^x q_0(x_1, \dot{x}_0(x_1, E_0))\,dx_1 + A_0\right],$$

условие периодичности которого приводит к известному бифуркационному уравнению (3). Покажем, что если E_0^* — простой вещественный корень, то при достаточно малом ε существует периодическая функция v, удовлетворяющая уравнению (10).

Первое приближение для v по ε получим из соотношения

$$v_1 = \dot{x}_0^{-1}\left\{\int_0^x q_0 dx_1 + A_1 + \varepsilon\left[-\frac{v_0^2}{2} + \int_0^x \left((q'_{\dot{x}})_0 v_0 + (q'_\varepsilon)_0\right)dx_1\right]\right\}.$$

Условие периодичности этой функции является определяющим уравнением для величины A_0:

$$A_0\frac{dL}{dE_0^*} + \int_0^{2\pi}\left[(q'_{\dot{x}})_0\,\dot{x}_0^{-1}\int_0^x q_0 dx_1 + (q'_\varepsilon)_0\right]dx = 0,$$

откуда следует требование, чтобы величина E_0^* была простым корнем. В результате полностью построено нулевое приближение v_0^*:

$$v_0^* = \dot{x}_0^{-1}\left\{\int_0^x q_0 dx_1 - \left(\frac{dL}{dE_0^*}\right)^{-1}\int_0^{2\pi}\left[(q'_{\dot{x}})_0\,\dot{x}_0^{-1}\int_0^x q_0 dx_1 + (q'_\varepsilon)_0\right]dx\right\}.$$

Оно, очевидно, совпадает с Y_0, полученной путем решения дифференциального уравнения. Далее, постоянная A_1 в выражении для v_1 определится аналогично из условия периодичности второго приближения:

$$N_1(A_1, \varepsilon) = A_1\frac{dL}{dE_0^*} + \int_0^{2\pi}\left[(q'_{\dot{x}})_0\,\dot{x}_0^{-1}\int_0^x q_0 dx_1 + (q'_\varepsilon)_0\right]dx + \Phi_1(A_1, \varepsilon) = 0,$$

где Φ_1 — известная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям Липшица по A_1 и ε и имеющая порядок ε. Так как $\left.\frac{\partial N_1}{\partial A_1}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{dL}{dE_0^*} \neq 0$, то справедлива теорема существования и единственности неявной функции $A_1(E_0^*, \varepsilon)$ при достаточно малом ε такой, что $A_1(E_0^*, 0) = A_0^*$.

Следующие приближения для v определяются по схеме:

$$v_k = \dot{x}_0^{-1}\left\{\int_0^x q_0 dx_1 + A_k + \varepsilon\left[-\frac{v_{k-1}^2}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^x ((q'_{\dot{x}})_0 v_{k-1} + (q'_\varepsilon)_0 + q^*(x_1, v_{k-1}; \varepsilon))\, dx_1\right]\right\},$$

где постоянная A_k может быть определена итерациями из условия периодичности функции v_{k+1}

$$N_k(A_k, \varepsilon) = A_k \frac{dL}{dE_0^*} + \int_0^{2\pi}\left[(q'_{\dot{x}})_0 \dot{x}_0^{-1}\int_0^x q_0 dx_1 + (q'_\varepsilon)_0\right] dx + \Phi_k(A_k, E_0^*, \varepsilon) = 0,$$

в котором $\Phi_k(A_k, E_0^*, 0) \equiv 0$.

Обоснование развитой схемы построения периодического решения неявного соотношения (9) может быть проведено аналогично [4]. В результате периодическую фазовую траекторию $\dot{x}(x, \varepsilon)$, удовлетворяющую условию $\dot{x} > 0$ (или $\dot{x} < 0$) и принадлежащую области G для всех x и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, можно предполагать построенной.

Замечание 2. Так как по определению $\dot{x} = dx/dt$, то из соотношения

$$t + \tau - \int_0^x y^{-1}(x_1, E_0^*, \varepsilon)\, dx_1 = 0 \tag{11}$$

оказывается возможным определить вращательное решение уравнения (1), имеющее вид:

$$x = x(t, \varepsilon) = \frac{2\pi}{T}(t + \tau) + \varphi\left(\frac{2\pi}{T}(t + \tau), \quad E_0^*, \varepsilon\right), \tag{12}$$

где φ — периодическая функция t периода T:

$$T = T(E_0^*, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y^{-1}(x, E_0^*, \varepsilon)\, dx \tag{13}$$

(ради однозначности будем рассматривать вращения в положительном направлении). Вследствие того что $\dot{x}(x, \varepsilon) \geqslant \delta > 0$ непрерывно дифференцируема по x, а $\int_0^x y^{-1}(x_1, E_0^*; \varepsilon)\, dx_1$ — дважды, то функция x, определяемая из (11), будет дважды непрерывно дифференцируемой по t. Дифференцируя тождество после подстановки (12) в (11), получим:

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = y(x(t, \varepsilon), E_0^*, \varepsilon).$$

Далее,

$$\ddot{x} \equiv \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dy}{dx}\dot{x} = -Q(x(t, \varepsilon)) + \varepsilon q(x(t, \varepsilon), \dot{x}(t, \varepsilon); \varepsilon),$$

откуда следует, что (12) является также решением уравнения (1).

Переходим к практическому построению возмущенного вращательного решения. Для этого предположим, что известно вращательное решение уравнения (11) при $\varepsilon=0$ (см. [5]). Затем перепишем соотношение (11) в виде

$$t + \tau = \int_0^x \dot{x}_0^{-1} dx_1 - \varepsilon \int_0^x \frac{v}{\dot{x}_0^2}\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(-\varepsilon\frac{v}{\dot{x}_0}\right)^i\right] dx_1 \tag{14}$$

и будем искать решение под видом выражения

$$x = \frac{2\pi}{T}(t+\tau) + \varphi_0\left(\frac{2\pi}{T}(t+\tau),\ E_0^*\right) + \varepsilon z, \tag{15}$$

в котором T — возмущенный период (13), а φ_0 и z — периодические функции t. После подстановки (15) в (14) получим относительно z нелинейное уравнение:

$$\frac{z(\psi, E_0^*, \varepsilon)}{\dot{x}_0(\psi+\varphi_0, E_0^*)} - \int_0^{\psi+\varphi_0}\left[\frac{v_0}{\dot{x}_0^2} + \frac{h}{\dot{x}_0}\right] dx + X(\psi, z, \varepsilon) = 0, \tag{16}$$

где X — известная достаточно гладкая функция, периодическая по $\psi = (2\pi/T)\cdot(t+\tau)$ периода 2π, причем $|X| = O(\varepsilon)$, а постоянная h равна: $h = -T_0^{-1}\int_0^{2\pi} v_0 \dot{x}_0^{-2} dx$. Периодическую функцию z определяем по обычной схеме последовательных приближений. Нулевое приближение равно:

$$z_0(\psi, E_0^*) = \dot{x}_0(\psi+\varphi_0, E_0^*)\int_0^{\psi+\varphi_0}\left[\frac{v_0}{\dot{x}_0^2} + \frac{h}{\dot{x}_0}\right] dx$$

и, очевидно, имеет период 2π по возмущенной фазе ψ. Последующие приближения находим из общей формулы

$$z_i = \dot{x}_0\left[\int_0^{\psi+\varphi_0}\left(\frac{v_0}{\dot{x}_0^2} + \frac{h}{\dot{x}_0}\right) dx - X(\psi, z_{i-1}; \varepsilon)\right].$$

Процесс будет равномерно сходящимся при достаточно малом ε, так как соотношение (16) удовлетворяет всем условиям существования неявной функции для всех вещественных значений ψ. Интересно отметить, что развитый метод позволяет построить возмущенное вращательное решение, если Q является только непрерывной функцией, а q удовлетворяет условиям теоремы.

Пример. Рассмотрим следующую конкретную задачу из механики [6]. Пусть однородный круговой конус катится без проскальзывания по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, в поле сил тяжести. Длина образующей конуса — l, угол раствора — 2β. Принимая за обобщенную координату угол θ, образованный соприкасающейся образующей с прямой наибольшего наклона плоскости, получим при некоторых ограничениях уравнение движения в виде

$$\ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{l(1/5+\cos^2\beta)}\sin\theta = -\varepsilon(\Gamma\,\mathrm{sgn}\,\dot{\theta} + \beta\dot{\theta}) + \varepsilon M, \tag{17}$$

где $\varepsilon > 0$ — малая величина, g — ускорение сил тяжести, Γ — коэффициент, характеризующий сухое трение, β — вязкое, а M — некоторый положительный «момент», компенсирующий убыль энергии. Ради простоты рассмотрения возьмем случай постоянных Γ, β, M. Невозмущенное уравнение имеет как периодическое решение (при $E_0 < 2k^2$) периода T_0

$$\theta_0 = 2\arcsin [\gamma \operatorname{sn} (2k (t - t_0 + \tau), \gamma],$$

$$\left(T_0 = \frac{2}{k} K(\gamma);\ \gamma = \sqrt{\frac{E_0}{2k^2}};\ k^2 = \frac{g \sin \alpha}{l (1/5 + \cos^2 \beta)} \right),$$

так и вращательное (при $E_0 > 2k^2$)

$$\theta_0 = 2\operatorname{am} \left[\sqrt{\frac{E_0}{2}} (t - t_0 + \tau),\ \gamma^{-1} \right] = \omega (E_0) (t - t_0 + \tau) +$$

$$+ 4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \cdot \frac{q^p}{1 + q^{2p}} \sin p \cdot \omega (E_0) \cdot (t - t_0 + \tau),$$

$$\left(T_0 = 2 \sqrt{\frac{2}{E_0}} K (\gamma^{-1}),\ \omega = 2\pi T_0^{-1} \right).$$

В написанных выражениях am — эллиптическая амплитуда, K — полный эллиптический интеграл 1-го рода, E_0 и τ — постоянные интегрирования, $q = \exp \{-\pi K'/K\}$. Уравнение (17) можно исследовать с помощью техники, развитой в (1). Однако этот путь приводит к интегрированию эллиптических функций, что весьма затруднено и может быть проведено приближенно. Поэтому рассмотрим случай, когда $\sin\alpha \sim \varepsilon$. Система будет описываться уравнением

$$\ddot{\theta} = \varepsilon M - \varepsilon (\Gamma \operatorname{sgn} \dot{\theta} + \beta \dot{\theta} + k^2 \sin \theta).$$

Исследуем случай положительного вращения. Из бифуркационного уравнения типа (3) получим: $\overset{*}{E_0} = (M - \Gamma)/\beta$, причем должно выполняться требование $M > \Gamma$. Случай $\overset{*}{E_0} = 0$ исключается теоремой и требует дополнительного исследования. Так как $dL/dE = -2\pi\beta^2/(M - \Gamma) < 0$, то периодическая фазовая траектория, близкая к постоянной, существует и единственна в известном смысле при ε достаточно малом. С помощью схемы замечания 2 нетрудно построить возмущенное вращательное решение уравнения (17), а также найти период возмущенного движения. На основании теоремы фазовая траектория асимптотически устойчива, а решение орбитально устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Волосов В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. матем., механ., № 6, 34—39, 1966.
2. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», 17, вып. 6, 108, 3—126, 1962.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, 151, вып. 6, 1260—1263, 1963.
4. Акуленко Л. Д. «Укр. матем. журн.», 18, вып. 5, 7—18, 1966.
5. Акуленко Л. Д. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 103—106, 1967.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
21.10 1967 г.

Кафедра
математики