ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1969

УДК — 041

В. В. КОМАРОВ, А. М. ПОПОВА

ОПЕРАТОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ ДИАГРАММ

В рамках четырехмерной теории возмущений развивается операторный формализм получения уравнений для амплитуд рассеяния нескольких частиц. Этот формализм соответствует методу суммирования нерелятивистских диаграмм, предложенному авторами для нахождения амплитуд рассеяния трех и четырех тел.

В работах [1] был предложен метод суммирования диаграмм для получения интегральных уравнений для амплитуд рассеяния трех и четырех нерелятивистских попарно взаимодействующих частиц. Анализ рядов диаграмм, суммируемых в указанные уравнения, позволил применить метод для решения ряда задач, возникающих при исследовании многочастичных ядерных реакций, например при определении длины нейтрон-нейтронного рассеяния [2] распада дейтерона [3] и ряда других.

Естественно, суммирование диаграмм в случае пяти и более частиц выглядит громоздко, и в настоящей работе мы предлагаем операторный формализм метода суммирования диаграмм, позволяющий на единой алгебраической основе получать интегральные уравнения фредгольмова вида для амплитуд рассеяния произвольного числа частиц.

Задача получения таких уравнений привлекала внимание многих исследователей [4—12]. Среди них следует особо отметить работы Л. Д. Фаддеева [4], где впервые были записаны интегральные уравнения для амплитуд взаимодействия трех тел и проведены доказательства возможности и единственности решений этих уравнений для широкого класса двухчастичных потенциалов. Ранее такие уравнения были получены в работе [5] для трех нуклонов в нулевом приближении по радиусу действия ядерных сил.

Прямое обобщение метода Фаддеева на случай произвольного числа частиц было проведено в работе [10], где предложен алгебраический метод получения системы уравнений с компактными ядрами для операторов амплитуд рассеяния N-частиц и отмечается, что система волновых функций, которая может быть получена с помощью этих уравнений должна удовлетворять условию полноты.

Некоторая система уравнений для амплитуд рассеяния N-частиц была записана Омнесом [11] на основе анализа связи графиков трехмерной теории возмущений. В работе [8] для получения искомых уравнений для задач N-тел вводится метод индукции по возрастающему числу частиц.

Предлагалось вместо системы уравнений для амплитуд рассеяния записывать одно универсальное уравнение для функции Грина системы N-частиц [6]. Метод получения этого уравнения основывался на принципах записи уравнения Дайсона и не содержал алгебраического формализма. Недавно проведенные исследования уравнения, предложенного Вайнбергом [6], показали, что его решения неоднозначны и, следовательно, в каждом конкретном случае необходимо проводить специальный анализ для отбора физических решений [13].

Во всех перечисленных выше работах задача рассеяния рассматривалась в стационарной постановке, и основой методов получения уравнений для амплитуд рассеяния служили трехмерные уравнения, связывающие функции Грина или резольвенты возмущенной и невозмущенной системы частиц. В таком подходе к описанию процессов рассеяния необходимо выделять первое двухчастичное взаимодействие (в предположении двухчастичных сил), даже если в начальный момент взаимодействуют несколько независимых пар частиц. Следовательно, амплитуды, для которых записываются системы интегральных уравнений, оказываются амплитудами переходов из некоторых асимптотических состояний, в которых выделено парное взаимодействие.

Отсюда в случае анализа систем четырех и более частиц количество амплитуд, для которых записывается система связанных уравнений, оказывается большим количества реальных физических асимптотических состояний. Действительно, переход из состояния, где взаимодействие включено в независимые пары, должен описываться суммой амплитуд, отличающихся порядком следования взаимодействия в этих пáрах. Такие амплитуды и итерации уравнений, которым они удовлетворяют, не имеют физического смысла и поэтому не могут быть применены для приближенного анализа конкретных физических задач и представления механизмов процессов рассеяния. Кроме того, при записи уравнений в окончательном виде с компактными ядрами приходится, как показано в работе [11], выделять двухчастичный потенциал из амплитуды первой взаимодейсвующей пары. Поэтому в уравнения должны входить как амплитуды рассеяния трех тел, так и потенциалы. Это обстоятельство, во-первых, может вызвать дополнительные осложнения при численном решении уравнений, так как условия, налагаемые на потенциал, более жесткие, чем на амплитуды, и, во-вторых, делает невозможным прямое обобщение уравнений в области, где потенциальная модель неприменима.

В отличие от всех упомянутых выше методов формализм метода суммирования диаграмм, о котором идет речь в настоящей работе, основан на нестационарной теории рассеяния и применения вторичного квантования. В такой постановке в элементах ряда теории возмущений безразличен порядок следования взаимодействий, осуществляющихся в независимых парах в определенный момент времени.

Поэтому амплитуды, для которых записываются уравнения, являются амплитудами переходов из определенных асимптотических состояний системы. Количество уравнений определяется числом реальных физических асимптотик, и итерации уравнений могут быть использованы для объяснения механизма процессов рассеяния.

Перейдем теперь к изложению алгебраического формализма метода суммирования диаграмм, выведем интегральные уравнения фредгольмова типа, не содержащие потенциал, для амплитуд рассеяния произвольного числа частиц, и как пример рассмотрим случай взаимодействия четырех частиц.

Исходя из нестационарного уравнения Шредингера, мы записываем оператор рассеяния в виде ряда Неймана — Лиувилля:

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\ldots\int_{-\infty}^{\infty}dt_nP\{V(t_1)V(t_2)\ldots V(t_n)\}, \quad (1)$$

где подынтегральное выражение означает хронологическое произведение операторов взаимодействия $V(t)$ для N-частиц.

Оператор взаимодействия $V(t)$ определен в пространстве Фока и состоит из суммы операторов двухчастичных взаимодействий $V_{ij}(t)$:

$$V_{ij}(t)=\sum_{\vec{k},\vec{k}',\vec{p}}a_i^+(\vec{p}+\vec{k},t)\,a_j^+(\vec{p}-\vec{k},t)\,V_{ij}(\vec{k},\vec{k}')\,a_i(\vec{p}+\vec{k}',t)\,a_j(\vec{p}-\vec{k}',t), \quad (2)$$

где первые два оператора означают рождение частиц i и j с относительным импульсом $\vec{k}$, последние два оператора — уничтожение частиц i и j с относительным импульсом $\vec{k}'$ и $V_{ij}(\vec{k},\vec{k}')$ — преобразование Фурье для двухчастичного потенциала $V(\vec{r})$.

Предположение о двухчастичных силах введено для простоты изложения. Эта теория справедлива для трех и более частичных сил, как и для статистик Бозе или Ферми.

Из определения операторов рождения и уничтожения следуют правила умножения, необходимые для дальнейшего изложения:

$$P\{a_i^+(\vec{k},t_0)\,a_j(\vec{k}',t_1\}=g(t_0,t_1)+N\{a_i^+(\vec{k},t_0)\,a_j^+(\vec{k}',t_1)\}, \quad (3)$$

$$g(t_0,t_1)=\delta(i,j)\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\frac{1}{2\pi i}\int\exp[-iE(t_0-t_1)]\,[E-E_k+i\tau]^{-1}dE,$$

где $g(t_0, t_2)$ обозначает хронологическую свертку операторов рождения и уничтожения частицы i или j.

Теперь мы сформулируем две основные теоремы о свойствах рядов вида (1), зависящих от комбинаций двучастичных операторов взаимодействия (2), которые вводятся в ряд (1).

Теорема 1. Если оператор взаимодействия в системе N-частиц задан суммой вида

$$V(t)=\sum_a V_a(t), \quad (4)$$

где $V_a(t)$ есть некоторый набор операторов двучастичных взаимодействий (2), причем одни и те же частицы принимают участие во взаимодействиях, входящих в различные $V_a(t)$, то оператор рассеяния T имеет вид

$$T=\sum_a T_a \quad (5)$$

и для его определения существует система уравнений:

$$T_a=\tau_a+\tau_aC\sum_{a\neq b}T_b, \quad (6)$$

где τ_a — оператор рассеяния, соответствующий оператору взаимодействия $V_a(t)$, и C — произведение хронологических сверток операторов рождения и уничтожения для одних и тех же частиц, принимающих участие во взаимодействиях $V_a(t)$ и $V_b(t)$.

Теорема 2. Если оператор взаимодействия в системе N-частиц задан суммой вида

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n} V_i(t), \tag{7}$$

где $V_i(t)$ есть некоторый набор операторов двучастичных взаимодействий (2) и одни и те же частицы не участвуют во взаимодействиях, входящих в различные $V_i(t)$ [1], то оператор рассеяния имеет вид:

$$T=\sum_{i=1}^{n}\tau_i+\sum_{i<j}^{n}\tau_i\otimes\tau_j+\sum_{i<j<k}^{n}\tau_i\otimes\tau_j\otimes\tau_k+\ldots+\tau_1\otimes\tau_2\otimes\tau_n, \tag{8}$$

где τ_i — оператор рассеяния, соответствующий оператору взаимодействия $V_i(t)$. Здесь знак $\otimes$ означает свертку операторов по Гугенгольцу [14].

Обе теоремы могут быть легко доказаны, если мы подставим операторы взаимодействия (4) или (7) в ряд Неймана — Лиувилля вида (1) и раскроем хронологическое произведение (по теореме Вика).

На основании результатов теорем мы разбиваем ряд (1) на другие ряды, дающие после суммирования интегральные уравнения для некоторых операторов рассеяния, позволяющих получать амплитуды переходов системы из определенных каналов.

Сначала мы суммируем ряды, соответствующие операторам амплитуд рассеяния определенных пар частиц. Таким образом мы избавляемся от δ-функций, которые возникают в элементах рядов вида (1) вследствие несвязанных процессов, соответствующих взаимодействиям частиц внутри независимых пар. Другими словами, мы избавляемся от потенциалов, вводя операторы рассеяния двух частиц.

В нашем формализме мы выполняем указанное суммирование и, таким образом, исключение потенциалов) одновременно в двух подсистемах, одна из которых содержит частицы i и j, а другая $(N-i-j)$. Имея это в виду, можно представить оператор взаимодействия в виде

$$\begin{gathered} V(t)=\sum_{i<j}^{n} V_{ij}=(1+C_{N-2}^2)^{-1}\sum_{i<j}^{n} V'_{ij,(N-i-j)}(t),\\ V'_{ij,(N-i-j)}(t)=V_{ij}(t)+V_{(N-i-j)}(t), \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$V_{(N-i-j)}(t) = \sum_{\substack{k=1,l=1\\ k<l\\ k\neq i,k\neq j,l\neq i,l\neq j}}^{n} V_{kl}(t) \tag{10}$$

и C_{N-2}^2 означает число сочетаний из $(N-2)$ по 2.

Представление $V(t)$ в виде (9) позволяет использовать теоремы для разбивки ряда (1) на ряды, отвечающие операторам рассеяния $T_{ij(N-i-j)}$, таким, что

$$T=(1+C_{N-2}^2)^{-1}\sum_{i<j}^{n} T_{ij,(N-i-j)}. \tag{11}$$

Для определения $T_{ij,(N-i-j)}$ существует система C_N^2 интегральных уравнений

$$T_{ij,(N-i-j)}=\tau_{ij,(N-i-j)}+\tau_{ij,\,(N-i-j)}C\Sigma' T_{mn(N-m-n)}. \tag{12}$$

[1] Частицы взаимодействуют в независимых подсистемах.

Здесь $\tau_{ij,(N-i-j)}$ означает оператор рассеяния частиц, взаимодействие которых определено оператором $V'_{ij(N-i-j)}$ в (9). Применяя результат теоремы 2, получим

$$\tau_{ij,(N-i-j)} = t_{ij} + T_{(N-i-j)} + t_{ij} \otimes T_{(N-i-j)}, \qquad (13)$$

где t_{ij} — оператор рассеяния двух частиц и $T_{(N-i-j)}$ — оператор рассеяния $(N-i-j)$-частиц.

Знак Σ' в уравнении (12) означает суммирование по всем m и n при условиях, что $(mn) \neq (ij)$, и члены $t_{ij}C\Sigma' T_{(N-m-n)}$ и $T_{(N-i-j)}C\Sigma' t_{mn}$ во множителе $\tau_{ij,(N-i-j)}C\Sigma'\tau_{mn,(N-m-n)}$ равны нулю, если частицы i и j принадлежат подсистеме $(N-m-n)$, m и n—подсистеме $(N-i-j)$ соответственно, а также член $T_{(N-i-j)}C\Sigma' T(N_{-m-n})$ равен $T_{(N-i-j)}C\Sigma' T'_{(N-m-n)}$. Здесь $T'_{(N-m-n)}$ есть оператор рассеяния (N_{-m-n}) чистиц, если оператор начального взаимодействия $V'_{(N-m-n)}(t) = \sum\limits_{kl} V_{kl}$, где $kl \subset (N-m-n)$ и $kl \not\subset (N-i-j)$.

Уравнения Фаддеева (4) следуют из уравнений (12) для случая $N=3$. Действительно, при $N=3$ мы имеем $V_{ij}(t) = V'_{ij}(t)$ и $T_{(N-i-j)} = 0$, так что

$$T = \sum_{i<j}^{3} T_{ij}, \quad T_{ij} = t_{ij} + t_{ij}C \sum_{\substack{m<n \\ mn\neq ij}} T_{mn}. \qquad (14)$$

Для случая $N>3$ уравнения (12) не отвечают альтернативе Фредгольма, так как не все операторы рассеяния, соответствующие несвязанным процессам в системе N-частиц, выделены в ядрах в свободные члены.

Чтобы получить уравнения фредгольмова вида для общего случая N-частиц, мы выполняем следующую процедуру. Оператор $T_{(N-i-j)}$ из (13) разбивается на два оператора $T^c_{(N-i-j)}$ и $T^d_{(N-i-j)}$, первый из которых соответствует связанным процессам в системе $(N-i-j)$ и не содержит опасных δ-функций после интегрирования по внутренним импульсам, а второй является суммой операторов, соответствующих всем возможным несвязанным процессам рассеяния в системе $(N-i-j)$. Очевидно, что оператор каждого несвязанного процесса рассеяния есть произведение операторов связанных процессов рассеяния, происходящих в независимых подсистемах, содержащих поэтому δ-функции, соответствующие закону сохранения суммарных импульсов движения частиц в подсистемах.

Далее мы вводим другой набор операторов:

$$T^{(1)}_{ij,(N-i-j)} = \{t_{ij} + T^d_{(N-i-j)} + T^c_{(N-i-j)} + t_{ij} \otimes T^d_{(N-i-j)}\} +$$
$$+ \{t_{ij} + T^d_{(N-i-j)} + T^c_{(N-i-j)} + t_{ij} \otimes T^d_{(N-i-j)}\} C\Sigma' T_{mn,(N-m-n)}, \qquad (15)$$

$$T^{(2)}_{ij,(N-i-j)} = t_{ij} \otimes T^c_{(N-i-j)} + t_{ij} \otimes T^c_{(N-i-j)} C\Sigma' T_{mn,(N-m-n)}. \qquad (16)$$

Сумма операторов, определенных в (15) и (16), равна оператору $T_{ij(N-i-j)}$, определенному в (12).

Уравнение (16) после первой итерации становится вполне фредгольмова вида. Чтобы привести уравнение (15) к фредгольмову виду, мы итерируем его $(N-3)$ раза. После каждой итерации в ядрах и свободных членах уравнения (15) возникают множители

$$T^c_0[(\alpha^a_{ij})\,\beta^b_{ij}]\,[T^c_{(N-\alpha^a_{ij})} + T^d_{(N-\alpha^a_{ij})}]. \qquad (17)$$

Здесь α^a_{ij} обозначает некоторую подсистему α, состоящую из a-частиц, набранных из N, и содержащую частицы i и j, β^b_{ij} обозначает некоторую подсистему b-частиц, набранную из α^a_{ij} и содержащую частицы i и j. Оператор $T^c_0[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij}]$ является свободным членом в уравнении для оператора $T^c[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij}]$ перехода системы из начального состояния, определенного оператором:

$$T^c(\beta^b_{ij}) \otimes [T(\alpha^a_{ij} - \beta^b_{ij}) + T^d(\alpha^a_{ij} - \beta^b_{ij})].$$

Преобразуем уравнение (15) так, чтобы получить в (17) вместо $T^c_0(\alpha^a_{ij})$ оператор $T^c(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij}$. Это позволяет получить уравнение фредгольмова вида для оператора амплитуды $W[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij};\ (N-\alpha^a_{ij})]$:

$$W[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij};\ (N-\alpha^a_{ij})] = T^c[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij}] \otimes T^c(N-\alpha^a_{ij}) +$$
$$+ T^c[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij}] \otimes T^c(N-\alpha^a_{ij}]\, C\Sigma' T_{mn,(N-m-n)}. \qquad (18)$$

Наконец, после всех $N-3$ итераций и указанных преобразований мы получаем $T = \sum\limits_{i<j}^{N} T_{ij,(N-i-j)}$:

$$T_{ij,(N-i-j)} = \sum_{\alpha,a,b,\beta} (1 + C^2_{(N-a)})\, W[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij};\ (N-\alpha^a_{ij})] +$$
$$+ \sum_{\alpha,a,b,\beta} [(1 + C^2_{(N-1-a)})\, F[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij};\ (N-\alpha^a_{ij})], \qquad (19)$$

где оператор $F[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij};\ N-\alpha^a_{ij}]$, стоящий в правой части (19), удовлетворяет соотношению

$$F[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij};\ (N-\alpha^a_{ij})] = T^c[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij}] \otimes T^d[N-\alpha^a_{ij}] +$$
$$+ T^c[(\alpha^a_{ij})\beta^b_{ij}] \otimes T^d[N-\alpha^a_{ij}]\, C \sum_{mn}{}' \sum_{\eta} \sum_{\nu} W(\eta^{\varkappa}_{mn})\, \nu^{\xi}_{mn},\ (N-\eta^{\varkappa}_{mn}), \qquad (20)$$

где $\varkappa = 2,3, \ldots (N-1)$, если $a > 2$; $\varkappa = 2$, если $a = 2$;

$\xi = 2,3, \ldots (\alpha - 1)$, если $a > 2$; $\xi = 2$, если $a = 2$.

Уравнения (18) и (20) справедливы для операторов рассеяния произвольного числа частиц. Например, в случае четырех частиц, обозначив частицы в подсистеме $(N-i-j)$ индексами i' и j', мы имеем

$$T = \sum_{i<j}^{4} T_{ij,i'j'}, \qquad (21)$$

где

$$T_{ij,i'j'} = \frac{1}{2} W(ij,\, i'j') + \sum_{\alpha} W(\alpha^3_{ij};\ 1) + F(ij;\, i'j'),$$

$$W(ij,\, i'j') = t_{ij} \otimes t_{i'j'} + t_{ij} \otimes t_{i'j'} C \sum_{\substack{m<n \\ mn\neq ij \\ mn\neq i'j'}}^{4} T_{mn,m'n'}, \qquad (22)$$

$$W(\alpha_{ij}^3;\,1)=\sum_{\substack{\varkappa\zeta\\ \varkappa\zeta\subset(\alpha_{ij}^3)}} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta}+\sum_{\substack{\varkappa\zeta\\ \varkappa\zeta\subset(\alpha_{ij}^3)}} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta}C\sum_{\substack{m<n\\ mn\neq\varkappa'\zeta'\\ mn\not\subset(\alpha_{ij}^3)}}^{4} T_{mn,m'n'},\tag{23}$$

$$F(ij,\,i'j')=t_{ij}+t_{ij}C\sum_{\substack{m<n\\ mn\neq ij\\ mn\neq i'j'}}^{4} W(mn,\,m'n').\tag{24}$$

Здесь $\sum\limits_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta}$ — некоторый оператор рассеяния трех частиц в подсистеме (α_{ij}^3), образованной из четырех частиц, так что в подсистему входит пара частиц $(i,\,j)$. Индексы $\varkappa\zeta$ обозначают возможные пары частиц из подсистемы (α_{ij}^3). Очевидно, в случае системы четырех частиц существуют две такие подсистемы. Оператор $\sum\limits_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta}$ связан с оператором рассеяния $T(\alpha_{ij}^3)_{ij}$, который удовлетворяет уравнению (14):

$$\sum_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta}=T(\alpha_{ij}^3)_{ij}-t_{ij},\tag{25}$$

т. е. не включает оператор t_{ij} несвязанного процесса рассеяния в подсистеме трех частиц (α_{ij}^3).

Удобно вместо суммы операторов

$$\sum_{\alpha} W(\alpha_{ij}^3;\,1)+F(\varphi,\,i'j')$$

ввести один оператор W_{ij}, который удовлетворяет уравнению:

$$W_{ij}=t_{ij}+\sum_{\alpha}\sum_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta}+\sum_{\alpha}\sum_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta}C\sum_{\substack{m<n\\ mn\neq\varkappa'\zeta'\\ mn\not\subset\alpha_{ij}^3}}^{4} T_{mn,m'n'}+$$

$$+t_{ij}\,C\sum_{\substack{m<n\\ mn\neq ij\\ mn\neq i'j'}}^{4} W(mn,\,m'n').\tag{26}$$

Тогда оператор рассеяния T четырех свободных частиц есть сумма

$$T=\sum_{ij,i'j'}[W(ij,\,i'j')+W_{ij}+W_{i'j'}],\tag{27}$$

где $(ij,\,i'j')$ принимает значения (12, 34), (13, 23) и (14, 23).

Для определения операторов в сумме (27) служит система уравнений (23) и (26).

От операторов $W(ij,i'j')$ и W_{ij} можно перейти к операторам, матричные элементы которых определяют вероятность переходов из канала в канал в системе четырех частиц. Такими операторами являются

$$W_{ij/kl},\quad W_{ij/kl,k'l'},\quad W_{ij,i'j'/kl},\quad W_{ij,i'j'/kl,k'l'},$$

удовлетворяющие уравнениям:

$$W_{ij,i'j'/kl,k'l'}=t_{ij}\otimes t_{i'j'}\;C\sum_{\substack{kl\neq ij\\ kl\neq i'j'}} t_{kl}\otimes t_{k'l'}+$$

$$+ t_{ij} \otimes t_{i'j'} C \sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} [W_{mn/kl,k'l'} + W_{mn,m'n'/kl,k'l'}],$$

$$W_{ij/kl,k'l'} = t_{ij} C \sum_{\substack{kl \neq ij \\ kl \neq i'j'}} t_{kl} \otimes t_{k'l'} + \sum_{\alpha} \sum_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij\varkappa\zeta} C \sum_{\substack{kl \neq \varkappa\zeta \\ kl \neq \varkappa'\zeta'}} t_{kl} \otimes t_{k'l'} +$$

$$+ \sum_{\alpha} \sum_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta} C \Bigg[\sum_{\substack{mn \subset \alpha \\ mn \neq \varkappa'\zeta'}} W_{mn/kl,k'l'} +$$

$$+ \sum_{\substack{mn \neq \varkappa\zeta \\ mn \neq \varkappa'\zeta'}} W_{mn,m'n'/kl,k'l'} \Bigg] + t_{ij} C \sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} W_{mn,m'n'/kl,k'l'},$$

$$W_{ij/kl} = \sum_{\alpha} \sum_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3) C \sum_{\substack{kl \subset \alpha \\ kl \neq \varkappa'\zeta'}} t_{kl} + \sum_{\alpha} \sum_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta} C \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{\substack{\mu\nu \subset \alpha \\ \mu\nu \neq \varkappa'\zeta'}} M(\beta_{\mu\nu}^3)_{\mu\nu,kl} +$$

$$+ t_{ij} C \sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} W_{mn,m'n'/kl} + \sum_{\alpha} \sum_{\varkappa\zeta} M(\alpha_{ij}^3)_{ij,\varkappa\zeta} C \Bigg[\sum_{\substack{mn \subset \alpha \\ mn \neq \varkappa'\zeta'}} W_{mn/kl} + \sum_{\substack{mn \neq \varkappa\zeta \\ mn \neq \varkappa'\zeta'}} W_{mn,m'n'/kl} \Bigg],$$

$$W_{ij,i'j'/kl} = t_{ij} \otimes t_{i'j'} C \sum_{\substack{kl \neq ij \\ kl \neq i'j'}} t_{kl} + t_{ij} \otimes t_{i'j'} C \sum_{\beta} \sum_{\mu\nu} M(\beta_{\mu\nu}^3)_{\mu\nu,kl} +$$

$$+ t_{ij} \otimes t_{i'j'} C \sum_{\substack{mn \neq ij \\ mn \neq i'j'}} [W_{mn/kl} + W_{mn,m'n'/kl}]. \tag{28}$$

Легко показать, что уравнения (28) полностью соответствуют интегральным уравнениям для амплитуд вероятностей переходов полученным нами ранее методом суммирования нерелятивистских графиков, отвечающих матричным элементам ряда (1). Для этого в уравнениях [1] для амплитуд B, C и D следует выделить в свободный член и ядро уравнений амплитуды рассеяния трех частиц в системе четырех частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ, **45**, 214, 1963; **46**, 2112, 1964; Nucl. Phys., **54**, 278, 1964; **69**, 278, 1965; **A90**, 625, 1967.
2. Войтовецкий В. К., Корсунский И. Л., Пажин Ю. Ф. ЖЭТФ, **47**, 1612, 1964; Nucl. Phys., **69**, 513, 1965; R. Bouches. Доклад на семинаре ФИАН СССР, январь 1968 г.
3. Чернухин Ю. И., Шувалов Р. С. «Ядерная физика», **4**, 272, 1966.
4. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, **39**, 1459, 1960; Тр. МИАН СССР, **69**, 3, 1963.
5. Скорняков Г. В., Тер-Мартиросян К. А. ЖЭТФ, **31**, 775, 1956.
6. Weinberg S. Phys. Rev., 133, B232, 1964; Rosenberg L., **140**, B217, 1965; Sugar R., Blankenbecler R., **136**, B472, 1964; Van-Winter C. Mat., Phys., Medd. Dan. Vid. Selsk., **2**, 8, 1964.
7. Weyers J. Phys. Rev., **145**, 1236, 1966; Phys. Rev., **151**, 1159, 1966.
8. Newton R. J. Math. Phys., 8, 851, 1967.
9. Grassberger P., Sandhas W. (preprint) Universität Bonn, 1967.
10. Якубовский О. Я. «Ядерная физика», **5**, 1312, 1967; Фаддеев Л. Д. Тр. проблемного симпозиума по физике ядра, т. I. Тбилиси, 1967.
11. Omnes R. Phys. Rev., **165**, 1265, 1968.
12. Mitra A. N., Gillespie J., Sugar R., Panchapakesan N., Phys. Rev., **140**, B1336, 1965; Allessandrini V. A. J. Math. Phys., **7**, 215, 1966; Mishima N., Takahashi Y. Progr. Theor. Phys., **35**, 440, 1966.
13. Federbush P. Phys. Rev., **148**, 1551, 1966; Newton R. Phys. Rev., **153**, 1502, 1967.
14. Hugenholtz H. Physica, **23**, 481, 1957.

Поступила в редакцию
30. 5 1968 г.

НИИЯФ