Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1969

УДК 533.9

ВО ХОНГ АНЬ

РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ ВБЛИЗИ НЕЙТРАЛЬНОЙ ТОЧКИ (I)

Приводится решение задачи о равновесной конфигурации диамагнитной плазмы изотропного давления в неоднородных магнитных полях с комплексным потенциалом типа $w \sim z^n$, $n \geqslant 2$. Найдена форма плазменной области для случая, когда плазма занимает область нейтральной точки (граница плазмы совпадает с частью силовой линии $\psi_0=0$). Обсуждается значение такой задачи для изучения некоторых вопросов физики солнечных вспышек и магнитных ловушек с остроугольными полями.

В предлагаемой заметке рассматривается вопрос о равновесном состоянии сгустков плазмы в неоднородном магнитном поле вблизи нейтральной точки. Этот вопрос имеет значение для физики магнитных ловушек и проблемы объяснения солнечных вспышек. Интерес к таким конфигурациям магнитного поля объясняется еще тем, что благодаря вогнутости силовых линий они магнитогидродинамически устойчивы.

Как известно, окрестности нейтральных точек магнитных полей представляют собой области, в которых достигается хорошая фокусировка магнитозвуковых (альвеновских) волн, распространяющихся со скоростью ($\sim B^2/4\pi\rho$) поперек магнитного поля [1]. Вследствие диссипативных процессов, происходящих в окрестности нейтральной точки, энергия волн передается частицам и превращается в тепловую энергию и энергию излучений. Таким образом обеспечивается нагрев плазмы в таких областях до достаточно высоких температур. Кроме того, в окрестностях нейтральных точек при определенных условиях может возникать пинч-эффект [2], который вследствие сжимаемости газа может увеличить температуру и плотность плазмы до величин, достаточных для возбуждения и поддерживания термоядерных реакций. Благодаря рассмотренным процессам окрестности магнитных нейтральных точек могут представлять собой хорошие ловушки для удержания и нагрева плазмы.

В настоящее время большинство существующих моделей солнечных вспышек связаны с процессами в высокотемпературной плазме солнечной хромосферы, происходящими в областях нейтральных точек магнитных полей солнца и обусловленными как магнитогидродинамическим (макроскопическим) поведением плазмы, так и кинетическими процессами в ней [5].

Полная классификация нейтральных точек, а также исследование геометрии магнитного поля в окружающих их областях проведены в работах [3, 4]. В работе [3] подробно рассмотрены случаи не только свободного, но и бессилового и статистического полей, что обусловлено учетом возможности приложения в физике солнечной атмосферы.

В связи со сказанным рассматриваемая в этой работе задача, хотя она связана лишь с диамагнитным поведением плазмы и не касается кинетических процессов в ней, может представлять интерес как для солнечной физики, так и для физики магнитных ловушек с остроугольными магнитными полями.

При решении задачи будут рассмотрены случаи, когда область плазмы включает нейтральную точку и ее окрестность и когда плазма занимает область вдоль некоторой силовой линии, не проходящей через нейтральную точку. В последнем случае будут указаны условия удержания плазмы в равновесном состоянии в области данной силовой линии магнитного поля.

Метод, предложенный в данной работе для решения задач о равновесных конфигурациях диамагнитной плазмы в неоднородных магнитных полях, основан на гидродинамической аналогии и сводит задачу о нахождении формы плазменной области при определенных граничных условиях к задаче гидродинамического обтекания геометрически простых объектов с соответствующими условиями относительно циркуляций.

В работе [6] С. А. Чаплыгин показал, что любую заданную трехсвязную область (в плоскости комплексного переменного $\xi=\xi_1+i\xi_2$) можно отобразить на внешность трех отрезков на одной прямой, в частности, на внешность трех параллельных прямолинейных отрезков в комплексной плоскости $z=x+iy$, путем использования характеристической функции, определяющей комплексный потенциал однородного на бесконечности потока, обтекающего три заданных контура с нулевой циркуляцией. В случае двухсвязной области характеристическая функция определялась следующей простой формулой:

$$\frac{1}{c}\,\frac{dz}{d\xi}=\frac{1}{2}\,e^{-i\theta}-\frac{1}{2\xi^2}\,e^{i\theta}+\left(\frac{1}{2}\,e^{-i\theta}+\frac{d^2}{2\xi^4}\,e^{i\theta}+\frac{G}{\xi}+\frac{d^2G^*}{\xi^3}+\frac{d\gamma}{\zeta^2}\right)\frac{1}{R(\xi)}; \tag{1}$$

$$R(\xi)=\left[\left(1-\frac{a_1}{\xi}\right)\ldots\left(1-\frac{a_4}{\xi}\right)\right]^{1/2}\equiv\left[\Pi\left(1-\frac{a}{\xi}\right)\right]^{1/2},$$

здесь $d^4=a_1a_2a_3a_4=\Pi a$ — комплексное число с модулем, равным единице, и произвольным аргументом, зависящим от выбора начального радиуса окружности, совпадающего с действительной осью в плоскости ξ (a_i — координаты концов дужек), θ, γ — действительные коэффициенты, G, G^* — пара комплексно сопряженных коэффициентов, c — некоторая постоянная, выражающая масштаб длины. Все коэффициенты определяются из условий, наложенных на точку $\xi=0$ и на циркуляции.

Функция $R(\xi)$ однозначная всюду в данной области на дужках имеет чисто мнимое значение, причем на внешней стороне дужек имеет знак минус, а на внутренней стороне плюс. На всем протяжении единичной окружности вне разрезов — дужек R действительна и положительна, на концах дужек $R=0$, а при $\xi\to\infty$ считается, что $R(\xi)\to+1$ [7].

Чтобы применить подход С. А. Чаплыгина к решению задач о равновесных конфигурациях плазмы в магнитных полях, предположим, что квазистационарное состояние плазмы, удовлетворяющей условиям применения магнитогидродинамического приближения, описывается уравнением

$$p_0+\frac{B_i^2}{8\pi}=\frac{Be^2}{8\pi}, \tag{2}$$

где B_i, B_e — напряженность поля по обе стороны границы раздела, p_0 — среднее давление плазмы, которое следует из основных уравнений магнитогидродинамики, характеризующих поведение плазмы (см., например, [8]). В рассматриваемом случае предполагается $B_i=0$, что характерно для высокопроводящей плазмы, имеющей резкую границу с магнитным полем.

На границе плазмы с полем должно быть выполнено условие

$$(\vec{B} \cdot \vec{n}) = 0, \tag{3}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе.

То, что граница плазмы совпадает с силовой линией (линией тока), означает, что она изображается в плоскости комплексного потенциала поля w в виде прямолинейных отрезков, параллельных оси абсцисс. При этом в предположении, что давление плазмы изотропно, напряженность поля на граничной силовой линии будет иметь постоянное значение. Все эти условия дают возможность отобразить область, занимаемую плазмой, на дужки единичной окружности во вспомогательной комплексной плоскости, а область поля — на внешность этих дужек. Искомый комплексный потенциал магнитного поля в присутствии плазмы после установления равновесия, вообще говоря, можно отождествлять с характеристической функцией, введенной С. А. Чаплыгиным по формуле (1), с коэффициентами, определяемыми из конкретных условий задачи. В некоторых случаях эту функцию удается определить из известных решений задач гидродинамического обтекания.

Таким образом, путем конформных отображений можно добиться однородности скорости обтекающего потока на бесконечности, а границу плазменной области свести к дуге окружности или другим геометрическим простым объектам.

Невозмущенное магнитное поле характеризуется комплексным потенциалом вида

$$w_0 = az^n = \varphi + i\psi,$$

где $n \geqslant 2$, а постоянный коэффициент a для простоты расчетов и без ущерба для общности положим равным единице, $z=x+iy$, φ — функция тока (компонент векторного потенциала, нормальный к плоскости z). Магнитное поле $\vec{B}_0=B_{0x}+B_{0y}$ определяется равенством

$$\frac{dw_0}{dz} = B_{0x} - iB_{0y} \equiv \vec{B}_0^*. \tag{4}$$

Пусть в таком поле область, включающая нейтральную точку $z=0$, занята плазмой, давление которой после установления равновесия равно p_0, изотропно и постоянно. Задача заключается в определении формы области, которую плазма будет занимать при равновесии, когда выполняются условия (2) и (3). Для решения этой задачи вводим безразмерную переменную

$$\xi = \left(\frac{\vec{B}^*}{B_s}\right)^{n/n-1}, \quad \vec{B}^* = B_x - iB_y,$$

B_s — напряженность поля на границе плазмы.

Так как магнитное поле в плоскости z имеет ось симметрии порядка n, нормальную к этой плоскости, достаточно рассмотреть один сектор, например, от 0 до $2\pi/n$. Граница плазменной области, ограниченная таким сектором, отображается в плоскости переменной ξ на окружность единичного радиуса, а часть сектора, занятая плазмой — на внутренность круга. Нам остается, следуя предложенному методу, определить комплексный потенциал потока, обтекающего круговой цилиндр при скорости на бесконечности, определяемой следующим образом:

$$\vec{v}_\infty = \frac{dw}{d\xi}\bigg|_{\xi\to\infty} = \frac{dw_0}{d\xi_0} = v_0 e^{-i\theta}, \quad v_0 = \left(\frac{B_s}{n}\right)^{n/n-1}, \ \theta = 0. \tag{5}$$

Здесь ξ_0 есть значение ξ в отсутствие плазмы, т. е. при невозмущенном магнитном поле:

$$\xi_0 = \left(\frac{\vec{B}_0^*}{B_s}\right)^{n/n-1} = \left(\frac{n}{B_s}\right)^{n/n-1} z^n.$$

По теории потенциального обтекания кругового цилиндра (см., например, [9]) запишем

$$w = v_0\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), \tag{6}$$

откуда

$$\frac{dw}{d\xi} = v_0\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right). \tag{7}$$

Как видно из (6), граница плазменной области совпадает с частью силовой линии $\psi_0 = 0$. Для определения положения границы в плоскости z напишем формулу, аналогичную (4):

$$\frac{dw}{dz} = \vec{B}^* = B_s \xi^{n-1/n}. \tag{8}$$

Объединяя (7) и (8), получим

$$z = \frac{nv_0}{B_s}\left(1 + \frac{1}{(2n-1)\xi^2}\right)\xi^{1/n} + c, \tag{9}$$

где постоянная равна нулю.

Координаты точек z_s, принадлежащих границе плазмы, определяются из (9) при $\xi = e^{i\sigma}$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ и имеют вид

$$z_s = \frac{nv_0}{(2n-1)B_s} e^{i\sigma/n}(2n - 1 + e^{-2i\sigma}),$$
$$z_{s0} = \frac{2n^2 v_0}{(2n-1)B_s}, \quad z_{s1} = \frac{2n(n-1)v_0}{(2n-1)B_s} e^{i\pi/2n}, \tag{10}$$

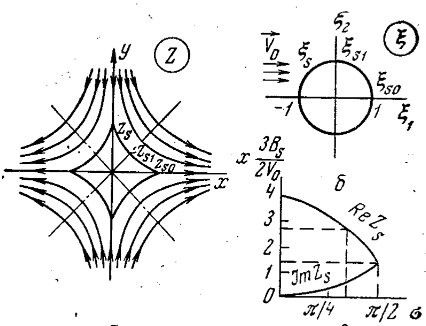
где z_{s0} — точка разветвления линии тока, z_{s1} — точка, находящаяся на минимальном расстоянии от начала координат.

На рисунке указаны положения этих точек, а также приближенная картина поля в присутствии плазмы по формулам (9) и (10) для случая $n=2$ и ее отображение в плоскости ξ. Выпишем здесь выражения для компонентов z_s как функции σ в случае $n=2$. Графики этих функций приведены на рис. 1 (*в*):

$$\mathrm{Re}\, z_s = \frac{2v_0}{3B_s}\left(3\cos\frac{\sigma}{2} + \cos\frac{3\sigma}{2}\right),$$
$$Im\, z_s = \frac{2v_0}{3B_s}\left(3\sin\frac{\sigma}{2} - \sin\frac{3\sigma}{2}\right). \tag{11}$$

Из выражений (5) для v_0 и (2) для связи между величиной магнитного поля на границе плазмы $B_e = B_s$ и ее давлением следует, что размеры плазменной области с учетом (10) зависят от давления следующим образом:

$$|z_s| \sim \frac{v_0}{B_s} \sim (B_s)^{1/n-1} \sim p_0^{1/2(n-1)}.$$



а
в

При $n \geqslant 2$ (что соответствует рассматриваемым нами полям) это означает: чем больше давление плазмы, тем сильнее она вытесняет силовые линии магнитного поля, одновременно сгущая их. Конфигурация плазмы при этом остается всегда замкнутой.

Положение магнитных силовых линий вне конфигурации в плоскости z определяется из выражения

$$z = \frac{nv_0}{B_s}\varphi^{1/n}e^{i\sigma/n}\left[1 + \frac{e^{-2i\sigma}}{(2n-1)\varphi^2}\right],$$

где $\varphi = \xi e^{-i\sigma} > 1$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant \pi)$ можно определить из уравнения линий тока в плоскости ξ. Это уравнение $\varphi = kv_0 = \text{const}$ будет иметь вид

$$k\varphi \sin\sigma\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right),$$

k — целые числа больше нуля.

Случай $\varphi_0 \neq 0$ будет рассмотрен в следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альвен Г., Фельтхаммар К. Г. Космическая электродинамика. М., «Мир», 1967.
2. Schatzman E. On the Possibility of Observing Radio Emission from Flares Stavc, Paper No. 99, Paris Sympsium on Radio Astronomy, Ed. R. N. Bracewell, Stanford Univ. Press, 1959.
3. Жугжда Ю. Д. «Геомагнетизм и аэрономия», **6**, № 3, 1966.
4. Морозов А. И., Соловьева Л. С. В сб.: «Вопросы теории плазмы», под ред. М. А. Леонтовича, вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.
5. Смит Г., Смит Э. Солнечные вспышки. М., «Мир», 1966.
6. Чаплыгин С. А. К теории триплана. Избранные труды по механике и математике. М., Гостехиздат, 1954, стр. 274.
7. Чаплыгин С. А. Схематическая теория разрезного крыла. Избранные труды по механике и математике. М., Гостехиздат, 1954, стр. 233.
8. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М., «Мир», 1967.
9. Милн-Томсон. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.

Поступила в редакцию
17.6 1968 г.

НИИЯФ