Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1969

УДК 528.27

М. У. САГИТОВ

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ОКРУЖАЮЩИХ МАСС НА РЕЗУЛЬТАТ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ТЯГОТЕНИЯ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Показано, что при определении постоянной тяготения могут возникнуть существенные ошибки за счет неоднородности гравитационного поля помещения, где проводится эксперимент. Для учета этого эффекта нужна точная регистрация амплитуды крутильных колебаний и необходимо знать, хотя бы грубо, гравитационное поле помещения.

Определение постоянной тяготения сводится к измерению взаимного притяжения известных пробных масс. Сила притяжения сравнивается с упругой силой деформированной крутильной нити, на которой подвешивается коромысло с пробными массами на концах. Сравнение осуществляется путем измерения периода крутильных колебаний коромысла с пробными массами в гравитационном поле других неподвижных пробных масс. Этим способом постоянная тяготения неоднократно измерялась различными авторами. Наиболее точное ее определение было проведено в Национальном бюро мер и стандартов США в Вашингтоне в 1942 г. [1]. Таким же способом предполагают осуществить измерение постоянной тяготения в Будапеште [2] и Триесте, о чем было сказано в докладе проф. А. Марусси на Московском гравитационном семинаре 7 июня 1968 г.

В экспериментах с крутильными весами неизвестными считаются модуль кручения и постоянная тяготения упругой нити. Обычно в прежних экспериментах предполагалось, что двух положений неподвижных пробных масс достаточно, чтобы исключить неизвестный модуль кручения нити, а также влияние гравитационного поля посторонних окружающих масс (стен, столбов, рельефа, аномальных масс Земли), которые будем называть возмущающими массами. Однако при более строгом решении задачи с учетом нелинейности момента упругих сил и момента сил притяжения это не всегда так. Возникает необходимость специального учета гравитационного влияния возмущающих масс и нелинейности момента упругих сил.

Рассмотрим дифференциальное уравнение крутильных колебаний коромысла с пробными массами в гравитационном поле неподвижных пробных масс, искаженном гравитационным влиянием возмущающих масс:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mathfrak{M}^{\circ}_{\text{пр}}(\varphi)+\mathfrak{M}^{*}_{\text{пр}}(\varphi)+\mathfrak{M}_{\tau}(\varphi)=0, \qquad (1)$$

где I — момент инерции горизонтального коромысла с пробными массами относительно оси крутильной нити, $\mathfrak{M}^{\circ}_{\text{пр}}(\varphi)$ — момент сил взаимного притяжения между коромыслом с пробными массами и неподвижными пробными массами, $\mathfrak{M}^{*}_{\text{пр}}(\varphi)$ — момент сил взаимного притяжения между коромыслом с пробными массами и возмущающими массами — столбами, стенами здания и т. д. (Положение возмущающих масс в процессе всего опыта предполагается неизменным.) $\mathfrak{M}_{\tau}(\varphi)$ — момент упругих сил закрученной нити, где $\mathfrak{M}_{\tau}(\varphi)=\tau_1\varphi+\tau_2\varphi^2+\tau_3\varphi^3$. Основной член подчиняется закону Гука, а два других учитывают незначительную нелинейность (τ_1, τ_2, τ_3 — постоянные, характеризующие упругие свойства нити, φ — угол отклонения крутильной системы от равновесного положения).

Если при определении постоянной тяготения используются притягивающие массы произвольной формы и плотности, то моменты сил притяжения $\mathfrak{M}^{\circ}_{\text{пр}}$ и $\mathfrak{M}^{*}_{\text{пр}}$ являются нелинейной функцией угла φ. Крутильные колебания описываются нелинейным дифференциальным уравнением. Впрочем, уравнение оказывается нелинейным и в случае точечных притягивающихся пробных масс.

В уравнении (1) не учитывается затухание колебаний, которым для простоты пренебрегаем, чтобы более явственно сначала проанализировать погрешности, обусловленные неоднородностью гравитационного поля помещений, где проводится эксперимент.

Обозначив сумму моментов сил $\mathfrak{M}^{\circ}_{\text{пр}}(\varphi)$ и $\mathfrak{M}^{*}_{\text{пр}}(\varphi)$ через $\mathfrak{M}(\varphi)$, напишем ее разложение в ряд по степеням угла отклонения φ крутильной системы от равновесного положения:

$$\mathfrak{M}(\varphi)=\mathfrak{M}^{\circ}_{\text{пр}}(\varphi)+\mathfrak{M}^{*}_{\text{пр}}(\varphi)=\mathfrak{M}_{\text{пр}}(\varphi)_{\varphi=0}+$$
$$+\varphi\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}+\frac{\varphi^2}{2!}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=0}+\ldots \qquad (2)$$

Интересующая нас постоянная тяготения f входит сомножителем во все коэффициенты $(\partial^k\overline{\mathfrak{M}}/\partial\varphi^k)_{\varphi=0}$. Эти коэффициенты будем без сомножителя f обозначать $\partial^k\mathfrak{M}/\partial\varphi^k$. Выведем частоту крутильных колебаний, соответствующую дифференциальному уравнению (1), используя разложение (2). Применяя приближенный метод, получим следующее разложение для квадрата частоты ω^2:

$$\omega^2=2\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{k!!}{(k+1)!!!}a^{k-1}L_k, \qquad (3)$$

где для краткости обозначено

$$L_1=\frac{f}{I}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}+\frac{\tau_1}{I},$$

$$L_3=\frac{f}{3!\,I}\left(\frac{\partial^3\overline{\mathfrak{M}}}{\partial\varphi^3}\right)_{\varphi=0}+\frac{\tau_3}{I},$$

$$L_k=\frac{f}{k!\,I}\left(\frac{\partial^k\overline{\mathfrak{M}}}{\partial\varphi^k}\right)_{\varphi=0}; \qquad (4)$$

$k=5,\,7\,\ldots$, a — амплитуда колебаний.

Запишем разность квадратов частот (3), которые наблюдаются при двух положениях неподвижных пробных масс. Коэффициенты $\partial^k \overline{\mathfrak{M}} / \partial \varphi^k$, а также частоты и амплитуды колебаний, соответствующие этим двум положениям, будем снабжать индексами I и II:

$$\omega_{\mathrm{I}}^2 - \omega_{\mathrm{II}}^2 = \frac{f}{I}\left\{\left[\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{I}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{II}}\right] + \frac{1}{8}\left[a_{\mathrm{I}}^2\left(\frac{\partial^3 \overline{\mathfrak{M}}}{\partial \varphi^3}\right)_{\mathrm{I}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - a_{\mathrm{II}}^2\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{M}}{\partial \varphi^3}\right)_{\mathrm{II}}\right] + \frac{1}{192}\left[a_{\mathrm{I}}^4\left(\frac{\partial^5 \mathfrak{M}}{\partial \varphi^5}\right)_{\mathrm{I}} - a_{\mathrm{II}}^4\left(\frac{\partial^5 \mathfrak{M}}{\partial \varphi^5}\right)_{\mathrm{II}}\right] + \ldots + \frac{3!\,\tau_3}{2f}\left(a_{\mathrm{I}}^2 - a_{\mathrm{II}}^2\right)\right\}. \tag{5}$$

Выразим постоянную тяготения f из уравнения (5), принимая во внимание, что каждый из коэффициентов $\partial^k \mathfrak{M} / \partial \varphi^k$ представляет собой сумму двух коэффициентов $\partial^k \overline{\mathfrak{M}}^\circ / \partial \varphi^k$ и $\partial^k \overline{\mathfrak{M}}^* / \partial \varphi^k$, соответствующих неподвижным пробным массам и возмущающим массам:

$$f = \frac{I\left(\omega_{\mathrm{I}}^2 - \omega_{\mathrm{II}}^2\right)}{\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{I}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{II}}}\left\{1 - \frac{1}{8}\,\frac{a_{\mathrm{I}}^2\left(\frac{\partial^3 \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi^3}\right)_{\mathrm{I}} - a_{\mathrm{II}}^2\left(\frac{\partial^3 \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi^3}\right)_{\mathrm{II}}}{\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{I}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{II}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{192}\,\frac{a_{\mathrm{I}}^4\left(\frac{\partial^5 \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi^5}\right)_{\mathrm{I}} - a_{\mathrm{II}}^4\left(\frac{\partial^5 \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi^5}\right)_{\mathrm{II}}}{\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{I}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{II}}} + \ldots + \Delta f_1 + \Delta f_2 + \ldots\right\}, \tag{6}$$

где

$$\Delta f_1 = -\left(a_{\mathrm{I}}^2 - a_{\mathrm{II}}^2\right)\frac{\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 \overline{\mathfrak{M}}^*}{\partial \varphi^3} + \frac{6\tau_3}{f}\right)}{\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{I}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{II}}};$$

$$\Delta f_2 = -\frac{\left(a_{\mathrm{I}}^4 - a_{\mathrm{II}}^4\right)}{192}\,\frac{\frac{\partial^5 \overline{\mathfrak{M}}^*}{\partial \varphi^5}}{\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{I}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}^\circ}{\partial \varphi}\right)_{\mathrm{II}}}. \tag{7}$$

В решении полностью исключаются неизмененные в течение опыта слагаемые моментов сил (4), которые не имеют сомножителем степени амплитуды. Таковы: $\partial \mathfrak{M}^* / \partial \varphi$ и τ_1. Оставшиеся тоже неизмененными в течение всего опыта слагаемые с $\partial^3 \overline{\mathfrak{M}}^* / \partial \varphi^3$, $\partial^5 \mathfrak{M}^* / \partial \varphi^5$ и τ_3 исключатся только при условии равенства амплитуд колебаний при обоих положениях неподвижных пробных масс. В противном случае влияние нелинейности момента упругих сил и момента сил притяжения окружающих масс остается неисключенным.

Каждая серия крутильных колебаний имеет свою начальную амплитуду, которая отличается от серии к серии. В прежних экспериментах не предъявлялось высоких требований амплитуде колебаний, за счет этого возможны значительные ошибки. Мы не располагаем конкретными величинами амплитуд колебаний, а также данными о гравитационном поле помещения, где проводились прежние эксперименты, поэтому не можем подсчитать поправок к результатам их определений постоянной тяготения.

Сделаем грубую оценку возможных ошибок в определении постоянной тяготения за счет неоднородностей гравитационного поля помещения. Ограничимся в уравнении (6) членами, соответствующими пятым степеням угла φ в разложении (2).

Предположим, что крутильная система имеет длину коромысла $2R = 30$ *см*, а пробные массы на его концах по $m = 50$ *г*. Две другие пробные шаровые массы по $M = 40$ *кг* последовательно располагаются на расстояниях $\rho_{\rm I} = 30$ *см* и $\rho_{\rm II} = 80$ *см* от оси крутильной нити. В качестве возмущающих масс рассмотрим шары массы M^*, располагающиеся симметрично на расстояниях ρ^* от крутильной нити. Для названных значений масс и расстояний подсчитаем разность производных момента сил взаимного притяжения пробных масс $(\partial\overline{\mathfrak{M}}^0/\partial\varphi)_{\rm I} - (\partial\overline{\mathfrak{M}}^0/\partial\varphi)_{\rm II}$. Полагая M^* и φ^* равными нескольким различным значениям, вычислим производные моментов сил притяжения возмущающих масс $\partial^3\overline{\mathfrak{M}}^*/\partial\varphi^3$, $\partial^5\overline{\mathfrak{M}}^*/\partial\varphi^5$.

Получим выражения коэффициентов $\partial\mathfrak{M}^0/\partial\varphi$, $\partial^3\mathfrak{M}^*/\partial\varphi^3$ и $\partial^5\mathfrak{M}^*/\partial\varphi^5$ в случае шаровых притягивающих масс, продифференцировав соответствующее число раз уравнение для момента сил притяжения, записанное в полярных координатах:

$$\mathfrak{M}(R, \varphi) = 2fmMR\rho \sin\varphi \left[\frac{1}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\varphi)^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(R^2 + \rho^2 + 2R\rho\cos\varphi)^{3/2}}\right]. \qquad (8)$$

Поправки Δf_1 и Δf_2 подсчитаем для ряда значений амплитуд при величинах коэффициентов $\partial\overline{\mathfrak{M}}/\partial\varphi$, $\partial^3\overline{\mathfrak{M}}/\partial\varphi^3$ и $\partial^5\overline{\mathfrak{M}}/\partial\varphi^5$, приведенных в табл. В этих расчетах величиной τ_3 пренебрегли.

Последние две колонки таблицы и подтверждают положение о том, что для определения постоянной тяготения необходимо знать неоднородность гравитационного поля помещения и тщательно учитывать амплитуды крутильных колебаний.

M^*, *кг*	ρ^*, *см*	$\frac{\partial^3\overline{\mathfrak{M}}^*}{\partial\varphi^3}$ СГС	$\frac{\partial^5\overline{\mathfrak{M}}^*}{\partial\varphi^5}$ СГС	$a_{\rm I}$, *рад*	$a_{\rm II}$, *рад*	af_1	af_2
5	20	$87\cdot10^5$	$-433\cdot10^5$	0,10	0,08	0,008	—0,000026
				0,10	0,05	0,016	—0,000042
				0,07	0,05	0,005	—0,000008
				0,05	0,02	0,005	—0,000003

Для учета влияния гравитационного поля столбов, стен здания, аномальных масс Земли необходимо хотя бы грубо знать значение этого поля. Для чего, по-видимому, будет достаточно провести измерение вторых производных потенциала притяжения с помощью гравитационных вариометров. Густота расположения точек зависит от характера изменения производных. Как показывает опыт измерения гравитационного поля одного из подвалов здания, горизонтальные градиенты и особенно кривизны сильно изменяются вблизи стен помещения, достигая тысячи *этвеш*. Используя методы конечных разностей по полю вторых производных гравитационного потенциала, можно рассчитать значения третьих производных и менее надежно более высоких [3]. Высшие производные для близлежащих возмущающих масс лучше рассчитывать непосредственно по заданному распределению масс.

С помощью гравитационного вариометра получаются производные по прямоугольным осям координат потенциала притяжения. Равенство же (6) выражает зависимость постоянной тяготения от коэффициентов $\partial^k\mathfrak{M}/\partial\varphi^k$ при степенях φ в разложении момента сил взаимного притяжения. Поэтому необходимо установить связь этих коэффициентов с производными по прямоугольным координатным осям потенциала притяжения. Для этого введем прямоугольную систему координат с началом в центре тяжести o крутильной системы, плоскость xoy примем за плоскость колебаний, а ось z направим вниз, вдоль оси крутильной нити. Момент сил притяжения $\mathfrak{M}_{\text{пр}}$ рассматривается как функция промежуточных переменных x и y, которые в свою очередь являются функциями переменных R и φ и связаны между собой простыми соотношениями $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$.

Найдем последовательные производные от выражения момента $\mathfrak{M}$ по переменной φ до пятого порядка включительно, рассматривая $\mathfrak{M}$ как сложную функцию φ с промежуточными переменными x и y. Нас интересуют производные моменты в точке с координатами $x=R$, $y=0$, что отмечается нулевым нижним индексом

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}=R(\mathfrak{M}_y)_0,\quad \left(\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=0}=R^2(\mathfrak{M}_{yy})_0-R(\mathfrak{M}_x)_0,$$

$$\left(\frac{\partial^3\mathfrak{M}}{\partial\varphi^3}\right)_{\varphi=0}=R^3(\mathfrak{M}_{yyy})_0-3R^2(\mathfrak{M}_{xy})_0-R(\mathfrak{M}_y)_0,$$

$$\left(\frac{\partial^4\mathfrak{M}}{\partial\varphi^4}\right)_{\varphi=0}=R^4(\mathfrak{M}_{yyyy})_0-6R^3(\mathfrak{M}_{xyy})_0+3R^2(\mathfrak{M}_{xx})_0-4R^2(\mathfrak{M}_{yy})_0+R(\mathfrak{M}_x)_0,$$

$$\left(\frac{\partial^5\mathfrak{M}}{\partial\varphi^5}\right)_{\varphi=0}=R^5(\mathfrak{M}_{yyyyy})-10R^4(\mathfrak{M}_{xyyy})_0-10R^3(\mathfrak{M}_{yyy})_0+$$

$$+15R^3(\mathfrak{M}_{xxy})_0+15R^2(\mathfrak{M}_{xy})_0+R(\mathfrak{M}_y)_0. \qquad (9)$$

Выразим производные моментов по прямоугольным осям x и y, написанные в правых частях последних равенств, через производные потенциала взаимного притяжения W. Для этого используем выражение момента сил притяжения, записанное в виде

$$\mathfrak{M}(x, y)=xW_y(x, y)-yW_x(x, y), \qquad (10)$$

где $W_x(x, y)$ и $W_y(x, y)$ — производные потенциала по координатным осям x и y. Продифференцируем обе части равенства (10) соответствующее число раз по x и y и положим в полученных равенствах $x=R$, а $y=0$. Подставив найденные выражения в формулу (9), получим выражения коэффициентов при степенях угла φ в разложении момента сил $\mathfrak{M}(R,\varphi)$ через производные гравитационного потенциала по координатным осям x и y:

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}=-R(W_x)_0+R^2(W_{yy})_0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial\varphi^2}\right)_{\varphi=0} = -R(W_y)_0 - 3R^2(W_{xy})_0 + R^3(W_{yyy})_0,$$

$$\left(\frac{\partial^3\mathfrak{M}}{\partial\varphi^3}\right)_{\varphi=0} = R(W_x)_0 - 4R^2(W_{yy})_0 + 3R^2(W_{xx})_0 - 6R^3(W_{xyy})_0 - R^4(W_{yyyy})_0,$$

$$\left(\frac{\partial^4\mathfrak{M}}{\partial\varphi^4}\right)_{\varphi=0} = R(W_y)_0 + 15R^2(W_{xy})_0 - 10R^3(W_{yyy})_0 + 15R^3(W_{xxy})_0 - 10R^4(W_{xyyy})_0 + R^5(W_{yyyyy})_0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial^5\mathfrak{M}}{\partial\varphi^5}\right)_{\varphi=0} = -R(W_x)_0 + 16R^2(W_{yy})_0 - 15R^2(W_{xx})_0 + 75R^3(W_{xyy})_0 - 15R^3(W_{xxy})_0 + 45R^4(W_{xxyy})_0 - 20R^5(W_{yyyy})_0 - 15R^5(W_{xyyyy})_0 + R^6(W_{yyyyyy})_0.$$

Мы не останавливаемся на оценке точности производных потенциала. Скажем лишь, что получить удовлетворительную точность производных четвертого, пятого, шестого порядков на основе измеренных исходных данных вряд ли возможно.

Итак, при определении постоянной тяготения с помощью крутильных колебаний необходимо тщательно добиваться равенства амплитуд колебаний в сериях наблюдений. Если имеется различие амплитуд, то надо учитывать гравитационное поле помещения, где производится эксперимент

ЛИТЕРАТУРА

1. Heyl P., Chrzanowski. J. of Res. Nat. Bureau Standards USA, **29**, 1—31, 1942.
2. Реннер Я. Новое измерение гравитационной постоянной. Препринт, Будапешт, 1968 (на русском языке).
3. Веселов К. Е., Сагитов М. У. Гравиметрическая разведка. М., «Недра», 1968.

Поступила в редакцию
27.6 1968 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии