Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1969

УДК 62—501.15

А. М. ГРИГОРЬЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОДВИЖНОСТИ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НАСТРОЙКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Определена функция подвижности, описан алгоритм настройки с использованием функции подвижности и приведен пример.

Одним из важнейших приложений теории чувствительности является использование функций чувствительности для настройки систем автоматического управления. Функции чувствительности показывают, как изменяются свойства системы при изменении ее параметров. Впервые задача настройки с использованием функций чувствительности была поставлена и решена в работах [1, 2] для случая, когда критерий качества задается в виде минимума некоторого функционала от выходного сигнала на конечном интервале времени.

Критерии качества могут быть заданы также и в другом виде. В частности, критерием качества может служить определенное расположение (на плоскости p) корней характеристического уравнения (полюсов передаточной функции) замкнутой системы. При расположении корней замкнутой системы, по каким-либо причинам не совпадающим с требуемым, необходимо изменением ряда параметров переместить корни на плоскости p в заданное положение. В общем виде этого можно добиться изменением всех параметров системы. Изменение всех параметров системы практически трудно реализуемо. Однако если в системе имеются доминирующие корни, а все другие корни уравнения системы расположены достаточно далеко от мнимой оси комплексной плоскости, то удовлетворение техническим условиям возможно перемещением только доминирующих корней. Такое перемещение можно произвести изменением одного параметра настройки или двух, для одного действительного или пары комплексно-сопряженных доминирующих корней соответственно. Это можно сделать для систем, движения в которых описываются линейным дифференциальным уравнением любого порядка.

Для перемещения доминирующих корней в необходимую область плоскости p воспользуемся функцией подвижности корней. Функция подвижности корней характеристического уравнения определяется следующим образом. Пусть характеристическое уравнение системы приводится к виду

$$\Phi_n(p) + \alpha\Psi_m(p) = 0, \tag{1}$$

где $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы степеней n и m соответственно ($n \geq m$), $p=\delta+j\omega$ и α — параметр. Введем вектор $\vec{p}_i$, проведенный из начала координат плоскости p в точку, являющуюся корнем уравнения (1). Тогда чувствительность этого корня к изменению параметра α можно охарактеризовать величиной

$$\vec{\lambda}_{\alpha p_i} = \frac{d\vec{p}_i}{d\alpha} = \frac{\Psi_m^2(p_i)}{\Phi_n(p_i)\Psi_m'(p_i) - \Phi_n'(p_i)\Psi_m(p_i)}. \tag{2}$$

Функция $\vec{\lambda}_{\alpha p_i}$ является функцией подвижности корня p_i по отношению к параметру α. При векторном представлении ($\vec{p}_i$) комплексного числа p_i функция $\vec{\lambda}_{\alpha p_i}$ также вектор. Для получения параметров этого вектора необходимо подставить в (2) значение $p_i=\delta_i+j\omega_i$ и определить модуль вектора

$$|\vec{\lambda}_{\alpha p_i}| = \frac{\sqrt{C^2+\omega_i^2 D^2}}{A^2+\omega_i^2 B^2} \tag{3}$$

и аргумент, определяющий угол вектора $\vec{\lambda}_{\alpha p_i}$ с положительным направлением действительной оси

$$\arg \vec{\lambda}_{\alpha p_i} = \operatorname{arc\,tg} \omega_i \frac{D}{C}, \tag{4}$$

где

$$A = (\Phi_r\Psi_r' - \Phi_r'\Psi_r) + \omega_i^2(\Phi_j'\Psi_j - \Phi_j\Psi_j'),$$

$$B = (\Phi_j\Psi_r' - \Phi_j'\Psi_r) + (\Phi_r\Psi_j' - \Phi_r'\Psi_j),$$

$$C = A\Psi_r^2 - A\omega_i\Psi_j^2 + 2\omega_i^2\Psi_r\Psi_j B,$$

$$D = 2A\Psi_r\Psi_j - B\Psi_r^2 + \omega_i^2 B\Psi_j^2.$$

Формулы (3) и (4) получены подстановкой

$$\Phi_n(p_i) = \Phi_r + j\omega_i\Phi_j, \quad \Psi_m(p_i) = \Psi_r + j\omega_i\Psi_j,$$

$$\Phi_n'(p_i) = (\Phi_r)_\delta' + j\omega_i(\Phi_j)_\delta', \quad \Psi_m'(p_i) = (\Psi_r)_\delta' + j\omega_i(\Psi_j)_\delta'$$

в (2) и переходом к геометрическому представлению комплексного числа. Значения Φ_r, Φ_j, Ψ_r и Ψ_j приведены в [3]. Понятие для модуля ($|\vec{\lambda}_{\alpha p_i}|$) функции подвижности дано в работе [4]. Функция $\vec{\lambda}_{\alpha p_i}$ показывает, как быстро и в какую сторону смещается корень p_i при увеличении α по абсолютному значению. Другими словами, в каком направлении проходит траектория корней через точку $p=p_i$ для параметра траекторий α и с какой «скоростью» смещается этот корень вдоль траектории.

Пусть линейная система описывается характеристическим уравнением

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k = 0, \tag{5}$$

где коэффициенты a_k являются функциями параметров системы. Выделим две группы параметров. В первую группу отнесем неконтролируемые параметры, которые могут отклоняться от своего номинального значения в процессе работы системы. Неконтролируемые параметры могут входить в коэффициенты a_k произвольным образом. Во вторую группу отнесем параметры, которые в процессе работы системы можно изменять в достаточно широких пределах (параметры настройки). Обозначим эти параметры через α_l ($l=1, \ldots, N$). Параметры α_l должны удовлетворять следующим условиям:

1. Каждый из параметров α_l входит линейно в несколько (или в один) коэффициентов a_k, т. е. для каждого α_l уравнение (5) можно переписать в виде (1):

$$\overline{\Phi}_n(p) + \alpha_e \overline{\Psi}_m(p) = 0, \tag{6}$$

причем вид полиномов $\overline{\Phi}_n(p)$ и $\overline{\Psi}_m(p)$ для каждого из параметров α_l может быть различным.

2. Параметры α_l не должны входить в числитель передаточной функции (не должны влиять на положение нулей системы).

Таким условиям удовлетворяют, например, коэффициенты передачи блоков обратной связи замкнутых систем автоматического управления.

Пусть $\tilde{p}_i$ — доминирующий корень (действительный или комплексный) уравнения (5), а p_i — его желаемое значение (рис. 1). Введем вектор смещения $\overrightarrow{\Delta p_i}$, проведенный из $\tilde{p}_i$ в точку p_i. В точке $\tilde{p}_i$ построим вектора подвижности $\vec{\lambda}_{\alpha_l \tilde{p}_i}$ для каждого из параметров α_l. Всегда можно составить такую линейную комбинацию векторов подвижности $\sum\limits_{l=1}^{N} \beta_l \vec{\lambda}_{\alpha_l \tilde{p}_i}$, что результирующий вектор будет равен вектору $\overrightarrow{\Delta p_i}$. Коэффициенты β_l и являются искомыми приращениями параметров α_l. Решив уравнение (5) с новыми значениями параметров $\alpha_l^1 = \alpha_l + \beta_l$, получим новое значение доминирующего корня $\tilde{p}_i^1$, которое, вообще говоря, может и не совпадать с искомым значением p_i. Тогда построим вектор $\overrightarrow{\Delta p_i^1}$, проведенный из $\tilde{p}_i^1$ в точку p_i. Если $|\overrightarrow{\Delta p_i^1}| < |\overrightarrow{\Delta p_i}|$, то для последующего приближения определяем вектора подвижности по параметрам α_l^1 в точке $\tilde{p}_i^1$ и повторяем весь цикл операций до тех пор, пока значения доминирующих корней не приблизятся к искомым с заданной степенью точности.

Если $|\overrightarrow{\Delta p_i^1}| > |\overrightarrow{\Delta p_i}|$, то в качестве приращения параметров α_l следует взять величины $\frac{\beta_l}{2}$, т. е. $\alpha_l^1 = \alpha_l + \frac{\beta_l}{2}$. Эта операция повторяется до тех пор, пока $|\overrightarrow{\Delta p_i^1}| < |\overrightarrow{\Delta p_i}|$, что всегда достижимо, в силу непрерывности траекторий корней уравнения (5) для параметров траекторий α_l. Очевидно, что для комплексно-сопряженных доминирующих корней на каждом шаге настройки решение $\sum\limits_{l=1}^{N} \beta_l \lambda_{\alpha_l p_i} = \overrightarrow{\Delta p_i}$ (комбинация приращений β_l) будет единственным, если настройка производится с помощью двух параметров ($N=2$)[1]. При этом должно выполняться требование неколлинеарности векторов подвижности корней по этим параметрам. При $N>2$ задача имеет бесчисленное множество решений. Действительно, из $N-1$ векторов можно составить бесчисленное множество линейных комбинаций,

[1] Если доминирующий корень действительный, то единственное решение будет при $N=1$.

дающих ненулевой вектор, если $N-1>1$. В этом случае из множества N параметров настройки следует выбирать параметры, которые слабее влияют на остальные (недоминирующие) корни системы.

Описанный выше алгоритм может быть применен для решения следующих задач:

1. Задача оптимизации: задано оптимальное расположение доминирующих корней и требуется изменить параметры настройки системы так, чтобы доминирующие корни этой системы совпадали с заданными.

2. Задача самонастройки: в результате возмущения неконтролируемых параметров доминирующие корни системы сместились от своего номинального значения; требуется, изменяя параметры настройки, вернуть их в исходное положение. Если при этом имеется возможность измерить отклонения неконтролируемых параметров, то задача решается достаточно просто. Если же это отклонение измерить нельзя, то необходимо определить новое положение доминирующих корней, считая положение остальных корней, расположенных далеко слева от мнимой оси, неизменным. Определение положения доминирующих корней на работающей системе можно осуществить, например, методом пробных сигналов. Следует отметить, что неучет смещения недоминирующих корней может привести к увеличению количества шагов самонастройки.

3. Программное изменение положения доминирующих корней, когда в определенные моменты времени, или непрерывно, необходимо перемещать доминирующие корни по заданной программе.

Отметим, что пренебрежение смещением недоминирующих корней возможно только в том случае, если они не перемещаются слишком близко к мнимой оси. Поэтому всегда полезно произвести предварительный расчет настройки, задаваясь максимальной величиной вектора смещения $\overrightarrow{\Delta p_i}$.

В качестве примера рассмотрим самонастройку системы стабилизации крена самолета [5]. Передаточная функция замкнутой системы самолет — автопилот, приведенная к угловым ошибкам, имеет вид

$$W(p)=\frac{k_\delta p(Tp+1)}{p(Tp+1)\left(p^2+\frac{1}{T_\Omega}p+k_\alpha\right)+k_\delta(k_2p^2+k_1p+k_0)}, \tag{7}$$

где T — постоянная времени автопилота, k_α, k_δ, $\frac{1}{T_\Omega}$ — аэродинамические характеристики самолета, зависящие от скорости, плотности воздуха, формы самолета и его веса; k_0, k_1, k_2 — передаточные числа автопилота. Характеристическое уравнение рассматриваемой системы, с учетом $k_\alpha\equiv 0$ (система стабилизации крена), имеет вид

$$Tp^4+\left(1+\frac{T}{T_\Omega}\right)p^3+\left(\frac{1}{T_\Omega}+k_2k_\delta\right)p^2+k_1k_\delta p+k_0k_\delta=0. \tag{8}$$

Параметрами настройки могут быть выбраны коэффициенты k_0, k_1 и k_2. Остальные параметры — неконтролируемые. Подставляя в (8) численные значения коэффициентов [5], $T=0{,}1$ *сек*, $\frac{1}{T_\Omega}=2{,}5$ 1/*сек*, $k_\delta=30$ 1/*сек*^{2}, $k_0=2$ 1/*сек*, $k_1=1{,}1$, $k_2=0{,}16$ *сек*, получим

$$0{,}1p^4+1{,}25p^3+7{,}3p^2+33p+60=0. \tag{9}$$

Корни этого уравнения — $p_{1,2}=-1{,}165\pm j\,5{,}107$, $p_3=-3{,}087$, $p_4=-7{,}083$ показаны на рис. 2 крестиками. Пусть скорость полета на постоянной высоте 900 *км/час* и по каким-либо причинам увеличилась до 1000 *км/час*, т. е. на 11,1%. Тогда характеристическое уравнение системы самолет — автопилот примет вид

$$0{,}1p^4 + 1{,}28p^3 + 8{,}68p^2 + 40{,}59p + 73{,}8 = 0. \tag{10}$$

Решения этого уравнения: $\widetilde{p}_{1,2} = -1{,}59 \pm j\,5{,}72$, $\widetilde{p}_3 = -6{,}30$, $\widetilde{p}_4 = -3{,}32$. Эти корни обозначены на рис. 2 треугольниками. Смещение доминирующего комплексного корня p_1 можно охарактеризовать вектором $\overrightarrow{\Delta p_1}$ с параметрами $|\overrightarrow{\Delta p_1}| = 0{,}746$, $\arg \overrightarrow{\Delta p_1} = -55°16'$. В качестве параметров

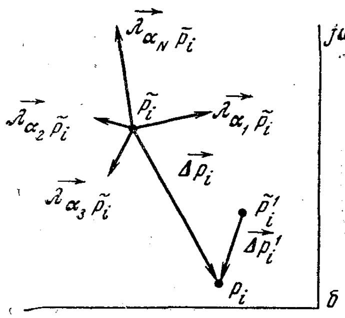

Рис. 1

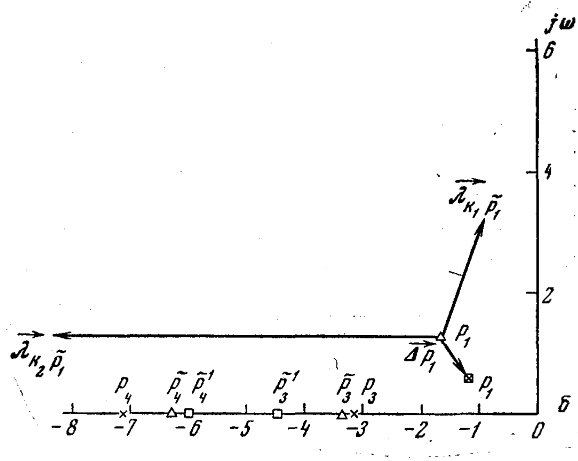

Рис. 2

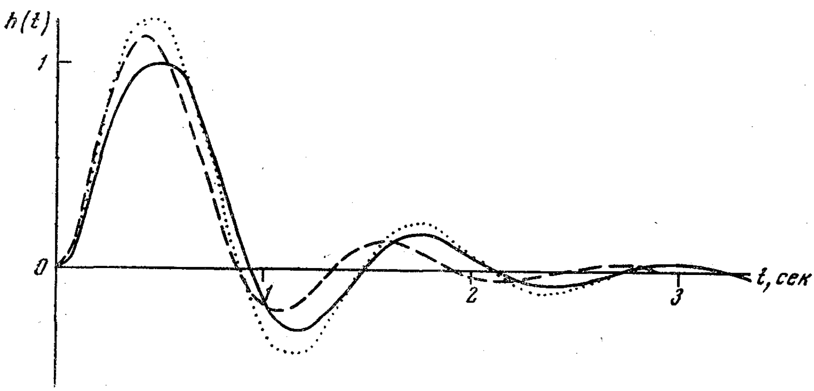

Рис. 3

настройки выберем коэффициенты k_1 и k_2. Такой выбор объясняется тем, что чувствительность недоминирующих корней по отношению к параметру k_0 существенно больше, чем к параметрам k_1 и k_2. Определив вектора подвижности $\overrightarrow{\lambda}_{k_1\widetilde{p}_1}$ и $\overrightarrow{\lambda}_{k_2\widetilde{p}_1}$, которые изображены на рис. 2 не в масштабе, и составляя их линейную комбинацию, равную вектору $\overrightarrow{\Delta p_1}$, получим приращения коэффициентов на первом шаге настройки: $\Delta k_1 = -1,151$, $\Delta k_2 = -0,022$. После первого шага настройки характеристическое уравнение примет вид

$$0,1p^4 + 1,28p^3 + 7,869p^2 + 35,037p + 73,8 = 0. \qquad (11)$$

Корни уравнения (11): $\tilde{p}^1_{1,2} = -1,163 \pm j\,5,112$, $\tilde{p}^1_3 = -4,479$, $\tilde{p}^1_4 = -5,995$. Эти точки изображены на рис. 2 квадратиками. Доминирующие корни уравнения (11) совпадают с доминирующими корнями $p_{1,2}$ уравнения исходной системы (9) с точностью, равной точности вычисления корней. Таким образом, настройка системы при заданном возмущении была произведена за один шаг. На рис. 3 показаны переходные процессы $h(t)$ при воздействии на систему единичного скачка. Сплошной линией показан переходный процесс в исходной системе, пунктирной — в возмущенной и точками — в возмущенной системе после настройки. Увеличение перерегулирования в возмущенной системе и в системе после настройки связано с тем, что увеличение скорости полета увеличивает коэффициент k_δ и, следовательно, общий коэффициент усиления системы (см. формулу (7)).

В заключение следует сделать одно замечание. Если за критерий качества выбрано не положение доминирующих корней, а их коэффициент демпфирования, как в [6], то задача настройки упрощается. Действительно, в этом случае достаточно изменять один параметр настройки. По этому параметру вектор подвижности должен иметь составляющую, нормальную к направлению, определяемому заданным коэффициентом демпфирования, во всей области своего изменения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокотович П. «Автоматика и телемеханика», **25**, № 12, 1964.
2. Кокотович П., Рутман Р. С. «Автоматика и телемеханика», **27**, № 6, 1966.
3. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
4. Григорьев А. М., Лисаков Ю. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 2, 1968.
5. Матыцин В. Д., Ряполов В. А. «Автоматика и телемеханика», **20**, № 4, 1959.
6. Кузовков Н. Т. Динамика системы автоматического управления. М., «Машиностроение», 1968.

Поступила в редакцию
15.6 1968 г.

Кафедра
физики колебаний