Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1969

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 53 : 51

Л. Д. АКУЛЕНКО

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ В ВОЗМУЩЕННЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В заметке на основе периодической фазовой траектории $E(\psi, \varepsilon)$ строятся возмущенные решения системы с вращающейся фазой вида

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon f(E, \psi; \varepsilon), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_0(E) + \varepsilon F(E, \psi; \varepsilon), \tag{1}$$

где $t \in (-\infty, \infty)$ — время, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ — малый вещественный параметр, $f$, $\omega_0$, $F$ — периодические (периода $2\pi$) непрерывные функции $\psi$, определенные для всех $|E - E_0^*| \leqslant \delta$ $(\delta > 0)$, $\psi \in (-\infty, \infty)$ и $\varepsilon$ принадлежащего указанному промежутку, причем $\partial f \mid \partial E$, $\partial f \mid \partial E$, $\partial f \mid \partial \varepsilon$, $d\omega_0 \mid dE$ и $F$ удовлетворяют по $E$, $\varepsilon$ условиям Лифшица с независящими от $\psi$ постоянными. Этот способ обладает большими преимуществами по сравнению с прямым методом последовательных приближений, использованном в [1 — 3] для построения вращательных и периодических решений автономных систем, особенно при исследовании критических случаев.

Предполагая, что $\omega_0(E_0^*) \neq 0$, исключим $t$ в системе (1):

$$\frac{dE}{d\psi} = \frac{\varepsilon f(E, \psi; \varepsilon)}{\omega_0(E) + \varepsilon F(E, \psi; \varepsilon)}. \tag{2}$$

Будем искать периодическое решение уравнения (2) в виде $E = E_0 + \varepsilon x(\psi, \varepsilon)$, где $E_0$ — постоянная, а неизвестная функция имеет период $2\pi$. После подстановки в (2), относительно $x$ получим уравнение

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{(f)_0}{(\omega)_0} + \frac{\varepsilon}{(\omega)_0}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 - \frac{(f)_0((\omega')_0 x + (F)_0}{(\omega)_0} + F^*(x, \psi; \varepsilon)\right], \tag{3}$$

в котором $F^*(x, \psi; 0)$, а символ $(\ )_0$ означает, что выражение в скобках берется при $\varepsilon = 0$, $E = E_0$. К уравнению (3) применима схема последовательных приближений, развития в [3].

Теорема 1. Возмущенное уравнение (2) имеет периодическое (периода $2\pi$) решение, если уравнение $R(E_0) = (\omega)_0^{-1} \int\limits_0^{2\pi} (f_0)\, d\psi = 0$ допускает вещественный корень $E_0^*$, принадлежащий указанной выше области; $dR \mid dE_0^* \neq 0$, т. е. если $E_0^*$ — простой корень.

Заменой $E = E_0^* + \varepsilon x(\psi, \varepsilon) + \xi$, где $\xi$ — вариация решения, получим явное выражение для критического характеристического показателя $\alpha$

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega_0 + \varepsilon F)^{-2} \left[ \frac{\partial f}{\partial E} (\omega_0 + \varepsilon F) - f \left( \omega_0' + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial E} \right) \right] d\psi,$$

откуда следует вторая теорема.

Теорема 2. Возмущенная периодическая фазовая траектория асимптотически устойчива при достаточно малом $\varepsilon$, если

$$\frac{\varepsilon}{(\omega_0)} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial f}{\partial E} \right)_0 d\psi = \varepsilon \frac{dR}{dE_0^*} < 0.$$

Переходим к построению стационарного семейства решений возмущенной системы (1). После подстановки $E(\psi, \varepsilon)$ во второе уравнение получим выражение для $\psi$ в замкнутом виде

$$\int_0^{\psi} [\omega_0 (E_0^* + \varepsilon x (\varphi, \varepsilon)) + \varepsilon F (E_0^* + \varepsilon x(\varphi, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)]^{-1} d\varphi = t - t_0 + \tau.$$

Из полученного уравнения относительно $\psi$ последовательными приближениями $(k \geqslant 1)$:

$$\psi_k = \omega (E_0^*, \varepsilon) (t - t_0 + \tau) + \int_0^{\psi_{k-1}} \left[ 1 - \frac{\omega (E_0^*, \varepsilon)}{\omega_0 (E) + \varepsilon F (E, \psi; \varepsilon)} \right] d\psi,$$

$$\psi_0 = \omega (E_0^*, \varepsilon (t - t_0 + \tau))$$

можно построить функцию $\psi(t, \varepsilon)$ вида

$$\psi (t, \varepsilon) = \omega (E_0^*, \varepsilon) (t - t_0 + \tau) + \varepsilon \psi (t - t_0 + \tau, E_0^*, \varepsilon),$$

где $\psi$ имеет по $t$ период

$$T (E_0^*, \varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega (E_0^*, \varepsilon)} = \int_0^{2\pi} [\omega_0 (E) + \varepsilon F (E, \psi; \varepsilon)]^{-1} d\psi.$$

Функция $E(t, \varepsilon)$ периодична по $t$ с тем же периодом: $E(t, \varepsilon) = E_0^* + \varepsilon x (\psi (t, \varepsilon), \varepsilon)$. В результате доказано утверждение.

Теорема 3. Возмущенная система (1) при достаточно малом $\varepsilon$ допускает стационарное семейство решений ($\tau$ — параметр семейства); если уравнение $R(E_0) = 0$ имеет вещественный корень $E_0^*$ и $\omega_0 (E_0^*)\, dR \,|\, dE_0^* \neq 0$.

Это возмущенное семейство решений будет орбитально устойчивым для $t \geqslant t_0$, если $\varepsilon\omega_0 (E_0^*) dR |\, dE_0^* < 0$, и неустойчивым в случае обратного неравенства. Аналогичное утверждение справедливо для $t \leqslant t_0$.

Отметим в заключение, что развитый метод исследования системы (1) особенно удобен в критических или особых случаях, когда $dR | dE_0^* = 0$ или $R(E_0) \equiv 0$, так как построение периодического решения уравнения (2) может быть проведено на основе теории Пуанкаре [3] (для аналитического относительно $E$, $\varepsilon$ уравнения).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Акуленко Л. Д. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 117, 1966.
2. Акуленко Л. Д., Волосов В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. матем., механ., № 6, 34, 1966.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.



Поступила в редакцию
17.11 1967 г.



Кафедра
математики