2. Немченко В. И. Измерение температуры поверхности моря на ходу судна. «Труды МГИ АН СССР», т. 26, 1962.
3. Туричин А. М. Электрические измерения неэлектрических величин. М.—Л., «Энергия», 1966.

Поступила в редакцию
1.11 1968 г.

Кафедра
физики моря и вод суши

УДК 517.925

Г. Н. МЕДВЕДЕВ, Б. И. МОРГУНОВ

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Постановка задачи. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X\,[x,\, x(t-\Delta),\, y,\, y(t-\Delta),\, \varepsilon], \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y\,[x,\, x(t-\Delta),\, y,\, y(t-\Delta),\, \varepsilon], \end{aligned} \tag{1}$$

где x и y — соответственно s- и m-мерные векторы, Δ (запаздывание) — постоянная положительная величина, $\varepsilon>0$ — малый параметр.

К системам вида (1) может быть приведен ряд нелинейных систем, описывающих колебательные и вращательные движения.

Системы вида (1) без запаздывания изучались многими авторами. В работах В. М. Волосова и Б. И. Моргунова [1, 2] предложена методика исследования резонансных явлений в системах вида (1), не содержащих запаздывания. Разработанная ими специализированная схема усреднения позволяет перейти от исходной системы к усредненной, вычислить стационарные резонансные значения переменных и исследовать устойчивость стационарных резонансных режимов как на асимптотически больших, так и на бесконечном промежутке времени.

Резонансные явления в квазилинейных системах с запаздыванием исследовались асимптотическими методами в работах В. П. Рубаника, Ю. А. Митропольского, В. И. Фодчука и других авторов [3, 4].

В настоящей заметке мы будем рассматривать системы вида (1). Резонансом в системе (1) назовем случай, когда для некоторого значения x_0 найдется отличный от нуля целочисленный вектор N такой, что

$$N\omega(x_0) = 0, \quad \omega(x_0) \neq 0.$$

Выбрав некоторую базисную систему r ($r \leqslant m-1$) векторов $N_1, \ldots, N_r$, введем в системе (1) новые переменные $\varphi_j = N_j y$ ($j=1, \ldots, r$) (фазовые расстройки). Выражая отсюда r переменных y и обозначая остальные с точностью до некоторых числовых множителей величинами $\beta_1, \ldots, \beta_{m-r}$, перепишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X\,[x,\, x(t-\Delta),\, \varphi,\, \varphi(t-\Delta),\, \beta,\, \beta(t-\Delta),\, \varepsilon], \\ \dot{\varphi} &= \lambda(x) + \varepsilon\Phi\,[x,\, x(t-\Delta),\, \varphi,\, \varphi(t-\Delta),\, \beta,\, \beta(t-\Delta),\, \varepsilon], \\ \dot{\beta} &= \Omega(x) + \varepsilon B\,[x,\, x(t-\Delta),\, \varphi,\, \varphi(t-\Delta),\, \beta,\, \beta(t-\Delta),\, \varepsilon]. \end{aligned} \tag{2}$$

В силу выбора переменных φ и β в точке x_0 выполняются условия

$$\lambda(x_0) = 0, \quad \Omega(x_0) \neq 0.$$

Точку $x(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)$ будем называть по определению устойчивым стационарным режимом, если при достаточно малых $\varepsilon>0$ решение $x(t, \varepsilon)$, $\varphi(t, \varepsilon)$ системы (2) мало отличается от $x(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)$ на больших промежутках времени t и если только начальные функции для системы (2) достаточно мало отличаются от стационарных значений $x(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)$ на некотором конечном промежутке (порядка нескольких Δ).

Основные результаты. Предлагается некоторая схема усреднения, сходная со схемой, использованной в работах [1, 2]. В нулевом приближении по ε координаты $x(0)=x_0$, $\varphi(0)=\varphi_0$ стационарной резонансной точки определяются системой уравнений

$$\overline{X}(x_0,\ x_0,\ \varphi_0,\ \varphi_0,\ 0)=0,\quad \lambda(x_0)=0, \tag{3}$$

где

$$\overline{X}(x,\ \xi,\ \varphi,\ \eta,\ 0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} X(x,\ \xi,\ \varphi,\ \eta,\ \beta,\ \beta-\omega\Delta,\ 0)\,d\beta. \tag{4}$$

В случае нескольких переменных β $\overline{X}$ определяется кратным интегралом вида (4).

Достаточные условия устойчивости стационарного резонансного режима (3) имеют вид алгебраических неравенств, которым должны подчиняться производные правых частей системы (2), взятые в стационарной точке x_0, φ_0. В общем случае эти условия весьма громоздки, поэтому мы приведем их здесь в частном случае, когда переменные x, φ, β — скаляры:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial\overline{X}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{X}}{\partial\xi}-\Delta\frac{\partial\overline{X}}{\partial\eta}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\substack{x=\xi=x_0\\ \varphi=\eta=\varphi_0}}<0,\\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial\overline{X}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\overline{X}}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ \varphi=\eta=\varphi_0}}<0.\end{gathered} \tag{5}$$

При выполнении указанных условий, а также ряда требований к системе (1) типа условий гладкости, стационарный резонансный режим устойчив в следующем смысле: любое решение x, φ системы (2), удовлетворяющее условию $\|x-x(\varepsilon)\|<C\varepsilon^2$ $\|\varphi-\varphi(\varepsilon)\|<C\varepsilon^2$ $(0<t<2\Delta)$ для всех $t>0$, удовлетворяет неравенствам $\|x-x(\varepsilon)\|<C\varepsilon$, $\|\varphi-\varphi(\varepsilon)\|<C\varepsilon$.

Приведем в заключение два примера.

Пример 1. Рассмотрим колебательное движение в сильно нелинейной системе с одной степенью свободы, находящейся под воздействием периодической внешней силы с частотой:

$$\ddot{y}+\operatorname{sgn} y=\varepsilon(a\cos\nu t-2\lambda\dot{y}(t-\Delta)). \tag{6}$$

Рассмотрим резонанс вида $p\omega(F_0)=q\nu$, где $p=2n+1$, $q=1$, F_0 — амплитуда колебаний.

Стационарные резонансные значения амплитуды F_0 и расстройки φ_0 имеют вид

$$F_0=\frac{\pi^2p^2}{8\nu^2};\ \sin(\varphi_0+p\beta_0)=\frac{(-1)^3\pi^3p^3\lambda}{12a\nu}.$$

Условия устойчивости (5) стационарного резонансного режима (3) принимают вид

$$(-1)^n a\cos(\varphi_0+p\beta_0)<0,$$

$$\frac{8a\nu(-1)^n}{\pi^3p^3}\sin(\varphi_0+p\beta_0)+\frac{4}{3}\lambda-\frac{8\lambda}{3}\left(\frac{\Delta\nu}{\pi p}\right)^3>0.$$

Пример 2. Рассмотрим вращательный режим в системе, аналогичной (6):

$$\ddot{y}+Q(y)=\varepsilon(a\cos\nu t-2\lambda\dot{y}(t-\Delta)),$$

$$Q(y)=\begin{cases}a<0, & 0<y<\dfrac{2\pi b}{b-a}\\[2ex] b>0, & \dfrac{2\pi b}{b-a}<y<2\pi.\end{cases}$$

Исследуя снова резонанс $p\omega=q\nu$ и ограничиваясь случаем больших начальных энергий, получаем следующие соотношения для определения стационарных резонансных значений энергии E_0 и расстройки φ_0:

$$-\frac{p}{q}\sqrt{2E_0}+\nu+\frac{1}{\sqrt{2E_0}}\frac{p}{q}\overline{V}=0,$$

где

$$\overline{V}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}V\,dy.$$

Условия устойчивости (5) стационарного резонансного режима (3) имеют вид

$$\sin(\varphi_0+p\beta_0)+\pi\nu q\frac{1}{\sqrt{2E_0}}\cos(\varphi_0+p\beta_0)<0,$$

$$-4\lambda+\frac{1}{\sqrt{2E_0}}\cos(\varphi_0+p\beta_0)<0.$$

В заключение приносим благодарность проф. В. М. Волосову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, **170**, 1966.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. «Вычислительная матем. и матем. физика», 8, № 2, 1968.
3. Рубаник В. П. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы), т. 2, 1968.
4. Митропольский Ю. А., Фодчук В. И. «Укр. матем. журн.», 18, № 3, 1966.

Поступила в редакцию
20.11 1968 г.

Кафедра
математики

УДК 523.11

А. А. БАРАНОВ

ОБ УРАВНЕНИИ СОСТОЯНИЯ $p=-\varepsilon$

До сравнительно недавнего времени считалось [1], что предельным уравнением вещества или поля является $p=\varepsilon/3$, где p — давление, ε — плотность энергии. Однако в работах [2, 3] показано, что для случая векторного и скалярного мезонных полей в рамках СТО допустимо уравнение состояния $p=+\varepsilon$.

В работах [4—6] было отмечено, что космологический член в уравнениях тяготения Эйнштейна можно формально истолковать как вещество с уравнением состояния

$$p=-\varepsilon. \qquad (1)$$

В связи с возросшей важностью космологического члена [7—9] в данной работе найдены решения в классической скалярной теории поля в рамках СТО и ОТО (модель де Ситтера), приводящие к уравнению состояния (1).

Плотность лагранжиана скалярного мезонного поля с источниками имеет вид [10]:

$$L=-\frac{1}{2}\left\{\sum_\nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\right)^2+\mu^2\psi^2\right\}-\eta\psi, \qquad (2)$$

где ψ — полевая функция, η — плотность источников (повсюду принятого $c=\hbar=1$).

Тогда тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\right)}+L\delta_{\mu\nu},$$