Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1969

УДК 621.371.562.4

В. А. ЕЛИСЕЕВНИН

ФЛУКТУАЦИИ ВОЛН РАЗЛИЧНОЙ ЧАСТОТЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Получены выражения для поперечных спектров и структурных функций флуктуаций уровня амплитуды, фазы и их взаимных корреляций двух плоских волн различной частоты, распространяющихся в локально однородной изотропной среде. Структурная функция показателя преломления такой среды подчиняется закону «двух третей» Колмогорова — Обухова.

Введение

Распространение волн в среде со случайными неоднородностями обычно сопровождается флуктуациями их параметров — амплитуды, фазы, интенсивности и т. д. Исследованию этого вопроса посвящено большое количество работ, основные результаты которых наиболее полно изложены в монографиях [1, 2]. Среди статистических характеристик, не рассматриваемых в этих работах, представляют интерес частотные корреляционные функции флуктуаций амплитуды, фазы и их взаимные частотные корреляции. Результаты расчетов частотных корреляционных функций в случае статистически однородной среды, для флуктуаций показателя преломления которой имеет место гауссов закон корреляции, приводятся в работах [3—8].

Согласно современным представлениям показатель преломления реальной турбулентной атмосферы наиболее точно описывается с помощью понятия локально однородного поля с постоянными или плавно меняющимися средними характеристиками. Известна работа [9], в которой для расчета хроматического мерцания звезд вычисляется коэффициент частотной корреляции флуктуаций уровня амплитуды волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере[1].

В настоящей работе приводятся результаты расчета статистических характеристик (поперечных структурных функций и их спектров) флуктуаций фаз и уровней амплитуд двух плоских волн различных частот, распространяющихся в изотропной турбулентной среде с постоянными средними характеристиками. Структурная функция показателя преломления такой среды подчиняется закону «двух третей» Колмогорова — Обухова. Результаты получены из решения скалярного волнового уравнения методом плавных возмущений с последующим применением ме-

[1] Краткое содержание этой статьи излагается в § 59 работы [2].

тода спектральных разложений. Задача решается аналогично случаю плоской волны одной частоты, распространяющейся в турбулентной среде [2], и может рассматриваться как его обобщение на случай двух волн различных частот. Окончательные выражения при стремлении разности частот двух плоских волн к нулю переходят в соответствующие формулы для одной частоты.

Необходимо также упомянуть о работе [10], посвященной рассмотрению теории модуляционного метода исследования дисперсионных свойств неоднородных сред. В ней получены выражения для средних квадратов флуктуаций фазового инварианта и разности амплитуд боковых составляющих тригармонической волны [1], распространяющейся в локально однородной среде, описываемой законом «двух третей». Однако все расчеты этой работы проведены в предположении малости разноса по частоте компонентов тригармонической волны, т. е. при условии $\Delta k/k_0 \ll 1$, где $k=\omega/c$ — волновое число. В настоящей работе такого ограничения на частоты не накладывается.

Частотно-поперечные спектры флуктуаций уровня амплитуды и фазы

Пусть среда со случайными неоднородностями заключена в правом полупространстве $x>0$. Из левого полупространства падают две плоские монохроматические волны с волновыми числами $k_1=k_0(1-\delta)$ и $k_2=k_0(1+\delta)$. Величина $\delta=\Delta k/2k_0$, где $\Delta k=k_2-k_1$, характеризует частотный разнос распространяющихся волн. Предполагается, что распределение неоднородностей квазистатично и сами неоднородности крупномасштабны, т. е. $k_{1,2}l_0 \gg 1$, где l_0 — внутренний масштаб турбулентности.

Поле каждой волны в правом полупространстве определяется методом плавных возмущений [1, 2], который в первом приближении позволяет найти флуктуации фазы $S^{(1)}=S-S_0$ и уровня амплитуды $\chi=\ln A/A_0$. Флуктуации комплексной фазы каждой волны определяются выражением

$$\Phi^{(1)}=\Phi-\Phi_0=\ln\frac{A}{A_0}+i(S-S_0)=\chi+iS, \tag{1}$$

где $\Phi=\ln A+iS$, A и S — амплитуда и фаза волны в правом полупространстве бе: $\Phi_0=\ln A_0+iS_0$, A_0 и S_0 — амплитуда и фаза в падающей волне.

Совместные структурные функции флуктуаций уровней амплитуд, фаз и их взаимных корреляций для двух волн различных частот определяются выражениями

$$\mathscr{D}_{\chi_1\chi_2}(r_1,r_2)=\overline{[\chi_1(r_1)-\chi_1(r_2)][\chi_2(r_1)-\chi_2(r_2)]}=\frac{1}{2}[Re\mathscr{D}_1(r_1,r_2)+Re\mathscr{D}_2(r_1,r_2)], \tag{2}$$

$$\mathscr{L}_{S_1S_2}(r_1,r_2)=\overline{[S_1^{(1)}(r_1)-S_1^{(1)}(r_2)][S_2^{(1)}(r_1)-S_2^{(1)}(r_2)]}=\frac{1}{2}[Re\mathscr{D}_1(r_1,r_2)-Re\mathscr{D}_2(r_1,r_2)], \tag{3}$$

[1] Фазовым инвариантом плоской тригармонической волны, состоящей из трех распространяющихся в одном направлении плоских гармонических волн с частотами ω_1, ω_0 и ω_2, удовлетворяющими соотношению $\omega_0-\omega_1=\omega_2-\omega_0=\Delta\omega$, называется величина $\theta=\varphi_0+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$, где φ_0, φ_1, φ_2 — фазы компонентов волны.

$$\mathscr{D}_{\chi_1 S_2}(r_1, r_2) = \overline{[\chi_1(r_1) - \chi_1(r_2)]\,[S_2^{(1)}(r_1) - S_2^{(1)}(r_2)]} =$$
$$= \frac{1}{2}\,[Im\mathscr{D}_2(r_1, r_2) - Im\mathscr{D}_1(r_1, r_2)], \tag{4}$$

$$\mathscr{D}_{\chi_2 S_1}(r_1, r_2) = \overline{[\chi_2(r_1) - \chi_2(r_2)]\,[S_1^{(1)}(r_1) - S_1^{(1)}(r_2)]} =$$
$$= \frac{1}{2}\,[Im\mathscr{D}_2(r_1, r_2) + Im\mathscr{D}_1(r_1, r_2)], \tag{5}$$

где структурные функции комплексных фаз

$$\mathscr{D}_1(r_1, r_2) = \overline{[\Phi_1^{(1)}(r_1) - \Phi_1^{(1)}(r_2)]\,[\Phi_2^{(1)*}(r_1) - \Phi_2^{(1)*}(r_2)]}, \tag{6}$$

$$\mathscr{D}_2(r_1, r_2) = \overline{[\Phi_1^{(1)}(r_1) - \Phi_1^{(1)}(r_2)]\,[\Phi_2^{(1)}(r_1) - \Phi_2^{(1)}(r_2)]} \tag{7}$$

и r_1 и r_2 представляют собой точки с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

Для дальнейших расчетов воспользуемся формулой (8) в § 46 работы [2]

$$u_\Phi(d\varkappa_2, d\varkappa_3, x) = \frac{ik}{2}\int_0^x e^{-\frac{i\varkappa^2(x-x')}{2k}}\, u_\varepsilon(d\varkappa_2, d\varkappa_3, x')\,dx',$$
$$\varkappa^2 = \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2, \tag{8}$$

где $\varkappa$ — пространственное волновое число, u_Φ и u_ε представляют собой спектральные плотности соответственно флуктуаций комплексной фазы волны $\Phi^{(1)}(x, y, z)$ и диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon^{(1)}(x, y, z)$ в их разложениях в двумерные стохастические интегралы Фурье—Стильтьеса [1]

$$\Phi^{(1)}(x, y, z) = \Phi^{(1)}(x, 0, 0) + \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int [e^{i(\varkappa_2 y + \varkappa_3 z)} - 1]\, u_\Phi(d\varkappa_2, d\varkappa_3, x), \tag{9}$$

$$\varepsilon^{(1)}(x, y, z) = \varepsilon^{(1)}(x, 0, 0) + \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int [e^{i(\varkappa_2 y + \varkappa_3 z)} - 1]\, u_\varepsilon(d\varkappa_2, d\varkappa_3, x). \tag{10}$$

Используя выражения (8)—(10), можно представить структурные функции $\mathscr{D}_1(r_1, r_2)$ и $\mathscr{D}_2(r_1, r_2)$ в плоскости $x = x_1 = x_2$ в виде

$$\mathscr{D}_{1,2}(x, y, z; x, y', z') = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \{1 - \cos[\varkappa_2(y - y') +$$
$$+ \varkappa_3(z - z')]\}\, F_{1,2}(\varkappa_2, \varkappa_3, x)\, d\varkappa_2 d\varkappa_3, \tag{11}$$

где

$$F_{1,2}(\varkappa_2, \varkappa_3, x) = \pm\frac{k_1 k_2}{4}\int_0^x\!\!\int_0^x e^{-\frac{1}{2}i\left[\frac{\varkappa^2(x-x')}{k_1} \mp \frac{\varkappa^2(x-x'')}{k^2}\right]} F_\varepsilon(\varkappa_2, \varkappa_3, x' - x'')\,dx'dx'', \tag{12}$$

F_ε — двумерная спектральная плотность диэлектрической проницаемо-

---

[1] Формула (8) получается путем подстановки выражений (9) и (10) в уравнение метода плавных возмущений

$$\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z^2} + 2ik\,\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x} + k^2\varepsilon^{(1)}(x, y, z) = 0.$$

сти среды. Последнее уравнение решается аналогично случаю одной частоты [2]:

$$F_1(\varkappa_2, \varkappa_3, x) = -\frac{ik_0^3}{2}\frac{\pi}{\varkappa^2}\frac{(1-\delta^2)^2}{\delta}\left[1-e^{-\frac{i\varkappa^2 x\delta}{k_0(1-\delta^2)}}\right]\Phi_\varepsilon(0, \varkappa_2, \varkappa_3), \tag{13}$$

$$F_2(\varkappa_2, \varkappa_3, x) = \frac{ik_0^3}{2}\frac{\pi}{\varkappa^2}(1-\delta^2)^2\left[1-e^{-\frac{i\varkappa^2 x}{k_0(1-\delta^2)}}\right]\Phi_\varepsilon(0, \varkappa_2, \varkappa_3), \tag{14}$$

где $\Phi_\varepsilon(0, \varkappa_2, \varkappa_3)$ — трехмерная спектральная плотность диэлектрической проницаемости среды, равная $\Phi_\varepsilon(\varkappa)$ в случае изотропности.

Из выражений (2)—(5) для структурных функций находятся аналогичные соотношения для спектральных функций

$$F_{\substack{\chi_1\chi_2\\ S_1S_2}} = \frac{1}{2}[ReF_1 \pm ReF_2], \tag{15}$$

$$F_{\substack{\chi_1 S_2\\ \chi_2 S_1}} = \frac{1}{2}[ImF_2 \mp ImF_1]. \tag{16}$$

Подставляя в них формулы (13) и (14) и полагая $x=L$, а также считая турбулентную среду изотропной, получаем окончательные выражения частотно-поперечных спектров флуктуаций уровней амплитуды и фазы двух плоских волн различных частот

$$F_{\substack{\chi_1\chi_2\\ S_1S_2}}(\varkappa, L) = \frac{\pi k_0^2 L}{4}(1-\delta^2)\left\{\frac{\sin \varkappa^2 L/k_0\,\delta/1-\delta^2}{\varkappa^2 L/k_0\,\delta/1-\delta^2} \mp \frac{\sin \varkappa^2 L/k_0}{\varkappa^2 L/k_0}\right\}\Phi_\varepsilon(\varkappa), \tag{17}$$

$$F_{\substack{\chi_1 S_2\\ \chi_2 S_1}}(\varkappa, L) = \frac{\pi k_0^3}{4\varkappa^2}(1-\delta^2)^2\left(1-\cos\frac{\varkappa^2 L}{k_0}\frac{1}{1-\delta^2} \pm \frac{1}{\delta} \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{\delta}\cos\frac{\varkappa^2 L}{k_0}\frac{\delta}{1-\delta^2}\right)\Phi_\varepsilon(\varkappa). \tag{18}$$

При $\delta \to 0$, т. е. при $k_1 \to k_0$ и $k_2 \to k_0$, формулы (17) и (18) переходят в соответствующие выражения для поперечных спектров в случае одной частоты [2].

Частотно-поперечные структурные функции флуктуаций уровня амплитуды и фазы

Согласно формулам (2)—(5) для определения частотно-поперечных структурных функций флуктуаций уровня амплитуды и фазы необходимо найти структурные функции $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$. Они рассчитываются для случая локально однородной изотропной турбулентности, когда $\Phi_\varepsilon(\varkappa)$ определяется выражением

$$\Phi_\varepsilon(\varkappa) = 0{,}033 C_\varepsilon^2 \varkappa^{-11/3} e^{-\varkappa^2/\varkappa_m^2}, \tag{19}$$

где C_ε — структурная постоянная диэлектрической проницаемости среды.

Для изотропной среды $\varkappa = \sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2}$, и формула (11) принимает вид

$$\mathscr{D}_{1,2}(\rho) = 4\pi\int_0^\infty [1 - I_0(\varkappa\rho)]\,F_{1,2}(\varkappa, L)\,\varkappa d\varkappa, \tag{20}$$

где $\rho = \sqrt{(y-y')^2+(z-z')^2}$ и $I_0(\varkappa\rho)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Подставляя в эту формулу выражения (13), (14) и (19), получаем

$$\mathcal{D}_1(\rho) = -i2\pi^2\, 0{,}033\, C_\varepsilon^2 k_0^3 \frac{(1-\delta^2)^2}{\delta} \int\limits_0^\infty [1-I_0(\varkappa\rho)] \times$$

$$\times \left[1 - e^{-\frac{i\varkappa^2 L\delta}{k_0(1-\delta^2)}}\right] \varkappa^{-14/3} e^{-\frac{\varkappa^2}{\varkappa_m^2}}\, d\varkappa, \tag{21}$$

$$\mathcal{D}_2(\rho) = i2\pi^2\, 0{,}033 C_\varepsilon^2 k_0^3 (1-\delta^2)^2 \int\limits_0^\infty [1-I_0(\varkappa\rho)] \times$$

$$\times \left[1 - e^{-\frac{i\varkappa^2 L}{k_0(1-\delta^2)}}\right] \varkappa^{-14/3} e^{-\frac{\varkappa^2}{\varkappa_m^2}}\, d\varkappa. \tag{22}$$

Решение интегралов, стоящих в правой части этих уравнений, имеется в работе [2]. Произведя аналогичные расчеты, получаем

$$\mathcal{D}_1(\rho) = i\, 0{,}033\pi^2 \frac{36}{55} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k_0^3 C_\varepsilon^2 \varkappa_m^{-11/3} \frac{(1-\delta^2)^2}{\delta} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -g\right) - \right.$$

$$\left. -1 - \left(1 + iD\frac{\delta}{1-\delta^2}\right)^{11/6} \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{g}{1+iD\,\delta/1-\delta^2}\right) - 1 \right] \right\}, \tag{23}$$

$$\mathcal{D}_2(\rho) = -i\, 0{,}033\pi^2 \frac{36}{55} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k_0^3 C_\varepsilon^2 \varkappa_m^{-11/3} (1-\delta^2)^2 \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -g\right) - \right.$$

$$\left. -1 - \left(1 + iD\frac{1}{1-\delta^2}\right)^{11/6} \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{g}{1+iD\,1/1-\delta^2}\right) - 1 \right] \right\}, \tag{24}$$

где $g = \frac{\varkappa_m^2 \rho^2}{4}$, $D = \frac{\varkappa_m^2 L}{k_0}$ — волновой параметр и ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ вырожденная гипергеометрическая функция.

Структурные функции (2)—(5) рассчитываются для двух предельных случаев малых и больших значений параметров $D\frac{\delta}{1-\delta^2}$ и $D\frac{1}{1-\delta^2}$. При этом используются асимптотические представления в виде рядов функции ${}_1F_1$ [2, 10].

В случае, когда $D\frac{1}{1-\delta^2} \ll 1$ $\left(\text{а следовательно, и } D\frac{\delta}{1-\delta^2} \ll 1\right)$, имеют место следующие формулы для частотно-поперечных структурных функций:

$$\mathcal{D}_{\chi_1\chi_2}(\rho) = \frac{0{,}033\,\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{72} C_\varepsilon^2 L^3 \varkappa_m^{7/3} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -g\right)\right], \tag{25}$$

$$\mathcal{D}_{S_1S_2}(\rho) = 0{,}033\pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_\varepsilon^2 L \varkappa_m^{-5/3} k_0 (1-\delta^2) \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g\right) - 1 \right], \tag{26}$$

$$\mathcal{D}_{\substack{\chi_1S_2\\ \chi_2S_1}}(\rho) = 0{,}25 \cdot 0{,}033\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_\varepsilon^2 L^2 \varkappa_m^{1/3} (1 \pm \delta) \left[1 - {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g\right)\right], \tag{27}$$

где Γ — гамма-функция. Частотный коэффициент корреляции флуктуаций уровня амплитуды в одной точке поля будет равен единице, т. е. отсутствует раскорреляция по уровню амплитуды для двух плоских волн различных частот

$$b_{\chi_1\chi_2}(0) = \frac{B_{\chi_1\chi_2}(0)}{\sqrt{B_{\chi_1}(0)\,B_{\chi_2}(0)}} = 1, \qquad (28)$$

где

$$B_{\chi_1\chi_2}(0) = \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_{\chi_1\chi_2}(\infty) = \frac{0{,}033\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{144}\,C_\varepsilon^2 L^3 \varkappa_m^{7/3}, \qquad (29)$$

так как ${}_1F_1\left(\frac{7}{6},\,1,\,-g\right)\to 0$ при $\rho\to\infty$. Значения корреляционных функций $B_{\chi_1}(0)$ и $B_{\chi_2}(0)$ в рассматриваемом случае согласно [2] будут также определяться последней формулой.

В случае, когда $D\frac{\delta}{1-\delta^2}\gg 1$ и $\left(D\frac{1}{1-\delta^2}\gg 1\right)$, необходимо рассматривать три области значений параметра ρ, в которых имеют место следующие выражения для частотно-поперечных структурных функций:

1) $\rho\ll l_0$, т. е. разнос по пространству ρ много меньше внутреннего масштаба турбулентности локально однородной среды l_0

$$\mathcal{D}_{\substack{\chi_1\chi_2\\ S_1S_2}}(\rho) = \frac{0{,}033\pi^2\,\frac{6}{5}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{8}\,C_\varepsilon^2 k^{13/6}L^{5/6}\rho^2\cos\frac{\pi}{12}\,(1-\delta^2)^{7/6}\,[\delta^{-1/6}\mp 1], \qquad (30)$$

$$\mathcal{D}_{\substack{\chi_1S_2\\ \chi_2S_1}}(\rho) = \frac{0{,}033\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{8}\,C_\varepsilon^2\rho^2\left\{k_0^{13/6}L^{5/6}\sin\frac{\pi}{12}\,(1-\delta^2)^{7/6}\times\right.$$

$$\left.\times\,[1\pm\delta^{-1/6}] - \varkappa_m^{-5/3}k_0^3\,\frac{(1-\delta)^2(1\pm\delta)}{\delta}\right\}; \qquad (31)$$

2) $l_0\ll\rho\ll\sqrt{\Delta\lambda L}$, $\quad \Delta\lambda = 2\pi\,\frac{k_2-k_1}{k_1k_2}$.

$$\mathcal{D}_{\substack{\chi_1\chi_2\\ S_1S_2}}(\rho) = \frac{1}{2}\,0{,}033\pi^2\,\frac{36}{55}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)C_\varepsilon^2 L^{11/6}k_0^{7/6}\times$$

$$\times\,(1-\delta^2)^{1/6}\left\{-\frac{11}{6}\sin\frac{17}{12}\pi\,\frac{g(1-\delta^2)}{D\delta}\,(\delta^{5/6}\mp\delta)+\right.$$

$$+\,\frac{55}{144}\cos\frac{17}{12}\pi\left[\frac{g(1-\delta^2)}{D\delta}\right]^2(\delta^{5/6}\mp\delta^2)-$$

$$\left.-\,\frac{55}{6^5}\sin\frac{17}{12}\pi\left[\frac{g(1-\delta^2)}{D\delta}\right]^3(\delta^{5/6}\mp\delta^3)\right\}, \qquad (32)$$

$$\mathcal{D}_{\substack{\chi_1S_2\\ \chi_2S_1}}(\rho) = \frac{1}{2}\,0{,}033\pi^2\,\frac{36}{55}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)C_\varepsilon^2 L^{11/6}k_0^{7/6}\times$$

$$\times\,(1-\delta^2)^{1/6}\left\{\mp\frac{11}{6}\cos\frac{17}{12}\pi\,\frac{g(1-\delta^2)}{D\delta}\,(\delta^{5/6}\pm\delta)\mp\right.$$

$$\mp \frac{55}{144}\sin\frac{17}{12}\pi\left[\frac{g(1-\delta^2)}{D\delta}\right]^2(\delta^{5/6}\pm\delta^2)\mp\frac{55}{6^5}\cos\frac{17}{12}\pi\times$$

$$\times\left[\frac{g(1-\delta^2)}{D\delta}\right]^3(\delta^{5/6}\pm\delta_3)\Big\}, \qquad (33)$$

3) $\rho \gg \sqrt{\Delta\lambda L}$

$$\mathscr{D}_{\chi_1\chi_2}(\rho)=\frac{1}{2}\,0{,}033\pi^2\,\frac{36}{55}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)C_\varepsilon^2L^{11/6}k^{7/6}(1-\delta^2)^{1/6}\times$$

$$\times\left\{\cos\frac{17}{12}\pi(\delta^{5/6}-1)+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\,\frac{11^2\cdot5^2}{6^7}\left[\frac{g}{D}(1-\delta^2)\right]^{-7/6}(1-\delta^2)\right\}, \qquad (34)$$

$$\mathscr{D}_{S_1S_2}(\rho)=\frac{1}{2}\,0{,}033\pi^2\,\frac{36}{55}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)C_\varepsilon^2L^{11/6}k_0^{7/6}(1-\delta^2)^{1/6}\left\{\cos\frac{17}{12}\pi(\delta^{5/6}+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\,\frac{11^2}{36}\left[\frac{g}{D}(1-\delta^2)\right]^{5/6}-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\,\frac{11^2\cdot5^2}{6^7}\left[\frac{g}{D}(1-\delta^2)\right]^{-7/6}(1+\delta^2)\right\}, \qquad (35)$$

$$\mathscr{D}_{\substack{\chi_1S_2\\ \chi_2S_1}}(\rho)=\frac{1}{2}\,0{,}033\pi^2\,\frac{36}{55}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)C_\varepsilon^2L^{11/6}k_0^{7/6}(1-\delta^2)^{1/6}\times$$

$$\times\left\{\sin\frac{17}{12}\pi(\delta^{5/6}-1)-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\,\frac{11^2\cdot5^2}{2\cdot6^4}\left[\frac{g}{D}(1-\delta^2)\right]^{-1/6}(1\pm\delta)\right\}. \qquad (36)$$

В рассматриваемом случае $\left(\text{когда } D\dfrac{\delta}{1-\delta^2}\gg 1 \text{ и } D\dfrac{1}{1-\delta^2}\gg 1\right)$ нормированный коэффициент частотной корреляции флуктуаций уровня амплитуды двух волн различной частоты в одной точке пространства будет определяться выражением

$$b_{\chi_1\chi_2}(0)=\frac{B_{\chi_1\chi_2}(0)}{\sqrt{B_{\chi_1}(0)B_{\chi_2}(0)}}=\frac{1-\delta^{5/6}}{(1-\delta^2)^{5/12}}, \qquad (37)$$

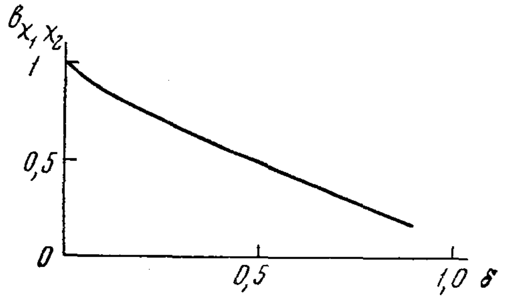

Рис. 1. График коэффициента частотной корреляции $b\chi_1\chi_2(0)$

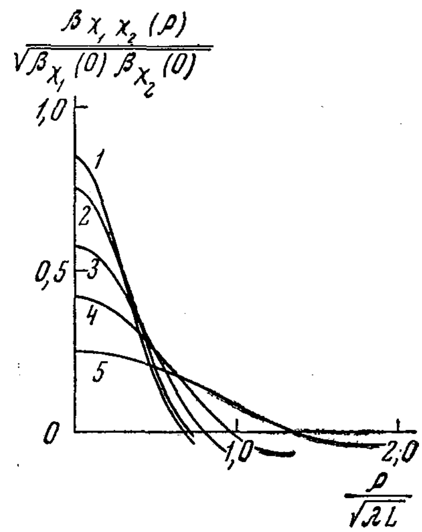

Рис. 2. График коэффициента частотной корреляции для различных значений δ:
1 — $\delta=0{,}1$; 2 — $\delta=0{,}2$; 3 — $\delta=0{,}4$; 4 — $\delta=0{,}6$; 5 — $\delta=0{,}8$.

$$\lambda=\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \quad \delta=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

где выражение для взаимной корреляционной функции при $\rho=0$ определяется формулой

$$B_{\chi_1\chi_2}(0) = \frac{1}{2}\mathscr{D}_{\chi_1\chi_2}(\infty) = 0{,}077C_\varepsilon^2 L^{11/6} k_0^{7/6}(1-\delta^2)^{1/6}(1-\delta^{5/6}). \qquad (38)$$

Значения корреляционных функций $B_{\chi_i}(0)$ $(i=1, 2)$ согласно [2] будут определяться выражением

$$B_{\chi_i}(0) = 0{,}077C_\varepsilon^2 L^{11/6} k i^{7/6}.$$

График коэффициента частотной корреляции $b_{\chi_1\chi_2}(0)$ приводится на рис. 1. Выражение для нормированного поперечного коэффициента частотной корреляции флуктуаций уровня амплитуды будет иметь вид

$$b_{\chi_1\chi_2}(\rho) = \frac{B_{\chi_1\chi_2}(\rho)}{\sqrt{B_{\chi_1}(0)\,B_{\chi_2}(0)}} = \frac{\mathscr{D}_{\chi_1\chi_2}(\infty) - \mathscr{D}_{\chi_1\chi_2}(\rho)}{\sqrt{\mathscr{D}_{\chi_1}(\infty)\,\mathscr{D}_{\chi_2}(\infty)}} =$$

$$= \frac{\delta^{5/6} Re\left[i_1^{11/6}\,{}_1F_1\left(-\frac{11}{6},\ 1,\ \frac{ig(1-\delta^2)}{D\delta}\right)\right] - Re\left[i_1^{17/6}\,{}_1F_1\left(-\frac{11}{6},\ 1,\ \frac{ig(1-\delta^2)}{D}\right)\right]}{(1-\delta^2)^{5/12}\sin\frac{\pi}{12}}. \qquad (39)$$

Выражение (40) путем простых преобразований сводится к выражению для коэффициента частотной корреляции уровня амплитуды (см. [2], стр. 443).

График этого выражения для различных значений δ представлен на рис. 2.

В заключение благодарю В. А. Красильникова за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
3. Бахарева М. Ф. «Радиотехника и электроника», № 1, 1959.
4. Бахарева М. Ф. «Радиотехника и электроника», № 10, 1961.
5. Брауде С. Я., Канер Э. А. «Изв. вузов», радиофизика, № 2, 1962.
6. Ерухимов Л. М. «Геомагнетизм и аэрономия», 4, № 1, 1964.
7. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. «Изв. вузов», радиофизика, № 5, 1967.
8. Бахарева М. Ф. «Радиотехника и электроника», № 3, 1968.
9. Татарский В. И., Жукова Л. Н. ДАН СССР, 124, № 3, 1959.
10. Рыжов Ю. А., Лаптева Э. П. «Изв. вузов», радиофизика, № 6, 1960.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
10.6 1968 г.

Кафедра
океанологии