

В. И. ГРИГОРЬЕВ, Е. Л. МУЗЫЛЕВ

## ПЕРЕНОРМИРОВКА ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

Формулируются условия, определяющие перенормировку энергии для системы произвольного числа частиц, взаимодействующих посредством квантованных полей.

Хорошо известные методы перенормировки в теории поля (см., например, [1] и [2]) обычно связываются с рассмотрением вакуумных эффектов для каждой из частиц в отдельности. Такой способ удобен, если взаимодействие между частицами системы описывается классическими потенциалами, а самовоздействие каждой из них — как результат поглощения и испускания квантов некоторого поля. Однако указанный способ описания является по самой сути приближенным. В то же время условия перенормировки желательно сформулировать в общем виде, вне зависимости от того приближения, в котором ищется решение.

В данной работе обсуждается такое общее условие перенормировки для энергии системы частиц. Так, рассмотрим по возможности наименее громоздкий пример, в котором к тому же перенормировка энергии является единственной. В качестве такого примера выберем систему из  $N$  нерелятивистских частиц (что исключает рождение пар и обеспечивает постоянство числа частиц), взаимодействующих с квантованным скалярным полем  $\phi$ .

В представлении Гейзенберга оператор  $\psi_n$  ( $n=1, \dots, N$ ) для  $n$ -ной частицы и оператор  $\phi$  удовлетворяют уравнениям

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \left( \frac{p_n^2}{2m_n} + \phi \right) \psi_n, \quad (\square - \mu^2) \phi = \sum_{n=1}^N \bar{\psi}_n \psi_n. \quad (1)$$

Обмен квантами между  $n$ -ной и  $k$ -ной частицами (при  $n \neq k$ , и при  $n=k$ ) входит в общую картину взаимодействия системы. Дальнейшее рассмотрение основывается на весьма простой идее: разбиение общей полевой энергии системы на собственную энергию, обусловленную самовоздействием частиц и на энергию их взаимодействия друг с другом — такое разбиение является излишним. Перенормироваться должна суммарная энергия системы. Введем условия такой перенормировки. Сделаем прежде всего промежуточный шаг: разделим общую собственную энергию системы на  $N$  слагаемых, каждое из которых  $\Delta \varepsilon_n$  определяет часть, приходящуюся на долю  $n$ -ной частицы; причем  $\Delta \varepsilon_n$  определяется

как самовоздействием  $n$ -ной частицы, так и действием на нее всех остальных частиц системы.

Запишем (1) в виде

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{p_n^2}{2m_n} - \Delta \varepsilon_n \right) \psi_n = (\varphi - \Delta \varepsilon_n) \psi_n. \quad (2)$$

Входящую в (2) комбинацию  $p^2/2m_n + \Delta \varepsilon_n$  ( $m_n$  — масса «математической» частицы) заменим на  $p_n^2/2M_n$ , где  $M_n$  — физическая масса. При таком способе введения  $M_n$  эта величина, конечно, должна зависеть от состояния системы. Однако порождаемые этим трудности являются лишь кажущимися. Действительно,  $\Delta \varepsilon_n$  пока остаются произвольными. Можно выбрать дополнительное условие, которое исключало бы  $\Delta \varepsilon_n$  из всех выражений для физических величин. Забегая вперед, скажем, что достаточно одного условия, так как приходится заботиться об исключении из  $S$ -матрицы лишь суммы

$$\Delta \varepsilon = \sum_{n=1}^N \Delta \varepsilon_n.$$

Выбор условия для  $\Delta \varepsilon$  и определяет перенормировку энергии, т. е., по сути, задает положение начала отсчета энергии. Можно использовать свободу выбора, например, так, чтобы при исчезновении взаимодействия между частицами энергии системы сводилась бы к сумме кинетических энергий свободных физических частиц с экспериментально определяемыми значениями масс. Однако поскольку существенны лишь разности энергии в различных состояниях, энергия любого из таких состояний может быть принята за начало отсчета.

Перейдем к представлению взаимодействия, причем нам будет удобней вместо операторов  $\psi_n$  для каждой из частиц, подчиняющихся уравнениям

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_n = \frac{p_n^2}{2M_n} \psi_n,$$

использовать «коллективный» оператор системы  $N$ -частиц  $\chi(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_N t)$ , удовлетворяющий уравнению

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t} = \left( \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2M_n} \right) \chi. \quad (3)$$

Уравнение для  $S$ -матрицы записывается в виде

$$i \frac{\partial S}{\partial t} = HS, \quad H = \sum_{n=1}^N (\mathcal{H}_n^{(+)} + \mathcal{H}_n^{(-)}) - \Delta \varepsilon h,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^{\pm} &= \int dx_1^3 \dots d^3 x_N \bar{\chi} \Phi^{(\pm)}(\bar{x}_n t) \chi, \\ h &= \int d^3 x_1 \dots d^3 x_N \bar{\chi} \chi. \end{aligned} \quad (4)$$

Эквивалентность (4) обычному уравнению для  $S$ -матрицы следует из того, что  $\int d^3 x_n \bar{\psi}_n(\bar{x}_n t) \psi_n(\bar{x}_n t)$  ведет себя как единичный оператор в пространстве чисел заполнения. Уравнение (4) удобно по той причине,

что в него входит лишь суммарная величина  $\Delta\varepsilon$ , что делает очевидной необходимость одного единственного условия перенормировки. Чтобы записать такое условие, удобно разложить  $S$  по нормальным произведениям и заменить (4) системой уравнений, связывающих матрицы конкретных переходов. Проиллюстрируем это на примере  $N=2$ .

Представим  $S$  в виде [3]

$$S = \sum_{i j n_1 n_2=0} S^{(i j n_1 n_2)}, \quad (5)$$

где  $S^{(i j n_1 n_2)}$  содержит нормальное произведение  $j$  операторов рождения и  $i$  операторов поглощения квантов скалярного поля, а также  $n_1, n_2$  операторов поглощения и испускания первой и второй частицы.

Уравнение (4) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} i \frac{\partial S^{(i j n_1 n_2)}}{\partial t} = & \sum_{n=1}^2 \mathcal{H}_n^+ (S_{(001)}^{(i j-1 n_1-1 n_2-1)} + S_{(011)}^{(i j-1 n_1-1 n_2)} + S_{(011)}^{(i j-1 n_1 1 n_2)} + \\ & + S_{(010)}^{(i j-1 n_1 n_2-1)} + \mathcal{H}_n^{(-)} (S_{(000)}^{(i-1 j n_1-1 n_2-1)} + \dots + S_{(100)}^{(i j+1 n_1-1 n_2-1)} + \dots) - \\ & - \Delta\varepsilon \hbar (S_{(000)}^{(i j n_1-1 n_2-1)} + S_{(010)}^{(i j n_1 n_2-1)} + S_{(001)}^{(i j n_1-1 n_2)} + S_{(011)}^{(i j n_1 n_2)}). \end{aligned} \quad (6)$$

Нижние индексы указывают, что в  $S_{(\alpha\beta\gamma)}^{(\dots)}$ :  $\alpha$  операторов рождения квантов скалярного поля,  $\beta$  операторов рождения первой частицы и  $\gamma$  операторов рождения второй входят в свертку с соответствующими операторами поглощения из гамильтониана.

Если к (6) добавить начальное условие

$$S(t_0 t_0) = 1 \equiv S^{(0000)}(t_0 t_0), \quad (7)$$

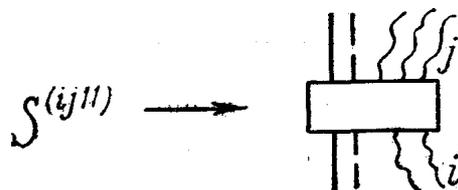
то с учетом (7) при произвольном  $t$  получим

$$S^{(i j 0 0)}(t t_0) = \delta_{i0} \delta_{j0}, \quad S^{(i j 1 0)} = S^{(i j 0 1)} = 0.$$

Рассмотрим условие перенормировки энергии. Для системы, содержащей по одной частице первого и второго типа, это условие таково (ср. [4]):

$$S_{|E_0}^{(0011)} = 0, \quad (8)$$

где знак  $|_{E_0}$  показывает, что система находится в соответствии с энергией  $E_0$ . Как уже говорилось, это состояние может быть произвольным, но фиксированным. Можно, например конкретности ради, условиться, что (8) относится к низшему состоянию. Чтобы пояснить (8), прибегнем к графической записи. Первую частицу обозначим сплошной, вторую — пунктирной, а скалярные частицы — волнистой линией. Матрице  $S^{(i j 1 1)}$  соответствует блок вида:



Уравнение для  $S^{(0011)}$  графически записывается в виде (сохраним лишь то, что соответствует отличным от нуля членам):

$$\text{Box} = \text{Box}_1 + \text{Box}_2 - \text{Crossed} - \text{Box}_3 \quad (9)$$

Если система принадлежит фиксированному состоянию с энергией  $E_0$ , то, в силу (8), и выражение в левой части и последнее слагаемое в правой обращаются в нуль, так что  $\Delta e$  определяется соотношением:

$$\text{Crossed}_{|E_0} = \text{Box}_1_{|E_0} + \text{Box}_2_{|E_0} \quad (10)$$

Поскольку  $\hbar$  в пространстве чисел заполнения ведет себя как единичный оператор, уравнение (10) для произвольного состояния может быть записано так:

$$\text{Box} = \text{Box}_1 + \text{Box}_2 - \text{Crossed}_{|E_0} - \text{Box}_3_{|E_0}$$

что означает, что энергия системы отсчитывается от  $E_0$ . Отличие указанного способа перенормировки от обычных «одночастичных» перенормировок, возникшее как следствие отказа от отдельного рассмотрения самовоздействия и взаимодействия частиц, и позволяет записать общее условие (8) — общее в том смысле, что оно сохраняет силу вне зависимости от того, в каком приближении решается система (6). Обобщение (8) на случай произвольного  $N$  очевидно: нужно записать в (8) матрицу  $S^{(\dots)}$  с индексами, соответствующими определяемому начальным условием числу частиц:

$$S_{|E_0}^{(0n_1 \dots n_N)} = 0 \text{ при } n_1 = \dots n_N. \quad (11)$$

К сказанному остается добавить, что вид условий перенормировки остается без изменений, если используется представление Фарри, т. е. частицы (кроме того, что они взаимодействуют с некоторым квантованным полем) считаются находящимися в заданных классических полях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bethe H. A. Phys. Rev., 72, 339, 1947.
2. Dyson F. J. Phys. Rev., 75, 1736, 1949.
3. Вавилов Б. Т., Григорьев В. И. и др. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 46, 1962.
4. Григорьев В. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 56, 1964.

Поступила в редакцию  
18.7 1968 г.

Кафедра  
квантовой теории