

И. Т. ОБУХОВСКИЙ

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА N ТЕЛ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Получено новое обобщение уравнений Фаддеева [1], отличающееся от обобщения Якубовского [2]. Различие объясняется использованием четырехмерной теории вместо трехмерной. Сформулирована соответствующая четырехмерная операторная техника, с помощью которой можно получать уравнения, аналогичные диаграммным уравнениям Комарова и Поповой [5]. Проводится топологический анализ амплитуд с помощью структурных диаграмм.

Для построения S -матрицы можно привлечь аппарат функций Грина из квантовой теории поля. В отличие от метода резольвенты, применяемого многими авторами [1, 2, 3] для получения точных уравнений в нерелятивистской задаче N тел (в стационарной постановке), метод функций Грина позволяет использовать для каждой частицы или группы частиц («кластера») свою временную координату. Это приводит к другому разложению S -матрицы в случае $N \geq 4$. Как известно [4], различие между двумя разложениями наглядно иллюстрируется различием в топологической структуре диаграмм.

Точное решение задачи N тел на основе фейнмановской диаграммной техники уже исследовалось В. В. Комаровым и А. М. Поповой в [5]. Эти авторы используют метод перестройки рядов теории возмущений. В данной работе мы предлагаем несколько иной подход, который удобен тем, что в его рамках удается показать эквивалентность соответствующей однородной системы уравнений исходному уравнению Шредингера. Эта эквивалентность гарантирует нам, что данная система уравнений не будет давать «лишних» решений, аналогичных «лишним» решениям уравнений Вейнберга [9]. Поэтому мы определяем все амплитуды не через перестроенные ряды теории возмущений, а через функцию Грина системы. Затем, исходя из уравнений для функций Грина, получаем систему связанных интегральных уравнений для амплитуд.

При выводе уравнений мы используем также разложение S -матрицы (или функции Грина) по типам связности, а амплитуды классифицируем по типу топологии соответствующих им структурных диаграмм («деревья» в четырехмерной теории; по аналогии с «деревьями» Омне-са [10]).

Полученная система уравнений совпадает с уравнениями Л. Д. Фаддеева [1] в случае $N=3$ (им эквивалентна также система уравнений Кома-

рова и Поповой [5], [8]), а при $N \geq 4$ она отличается от уравнений Яковлевского. Интегральное ядро системы не содержит неустранимых сингулярностей и его вполне непрерывность, очевидно, может быть доказана тем же методом, который использует Фаддеев [11].

Постановка задачи

Обозначим символом Λ_i разбиение системы из N частиц на i кластеров:

$$\Lambda_i = \{(n_1), (n_2), \dots, (n_i)\}. \quad (1)$$

Предполагается, что в любом из кластеров (n_k) могут существовать связанные состояния. Поэтому будем подразумевать под кластером (n_k) связанное состояние n_k частиц. Обозначим через $\psi_{\Lambda_i}^{\circ}(\xi t)$ волновую функцию свободного движения кластеров разбиения Λ_i . В конфигурационном пространстве системы

$$(\xi) = (r_1, r_2, \dots, r_N)$$

свободное движение кластеров (1) описывается уравнением Шредингера

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - K_{\Lambda_i}(\xi) \right] \psi_{\Lambda_i}^{\circ}(\xi t) = 0 \quad (2)$$

с гамильтонианом $K_{\Lambda_i}(\xi)$, включающим взаимодействие только между теми частицами, которые входят в один и тот же кластер:

$$K_{\Lambda_i}(\xi) = H_0(\xi) + V_{\Lambda_i}(\xi), \quad V_{\Lambda_i}(\xi) = \sum_{(ab) \in \Lambda_i} V_{ab}(r_a - r_b).$$

Пусть $V(\xi)$ — полное взаимодействие в системе, а $H(\xi) = H_0(\xi) + V(\xi)$ — полный гамильтониан. Для построения S -матрицы необходимо найти такие решения $\psi^{\Lambda_i}(\xi t)$ уравнения Шредингера

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - H(\xi) \right] \psi(\xi t) = 0,$$

которые в отдаленном прошлом ($t \rightarrow -\infty$) переходят в волновые функции $\psi_{\Lambda_i}^{\circ}(\xi t)$. Очевидно, решение $(\psi^{\Lambda_1}(\xi t) \equiv \psi_{\Lambda_1}^{\circ}(\xi t))$ описывает связанное состояние системы, а все остальные решения $\psi^{\Lambda_i}(\xi t)$ ($i=2, 3, \dots, N$) описывают рассеяние из каналов Λ_i .

Решения $\psi^{\Lambda_i}(\xi t)$ можно получить из волновых функций $\psi_{\Lambda_i}^{\circ}(\xi t)$ с помощью функции Грина системы $G^{(N)}(\xi t, \xi' t')$, если воспользоваться предельным переходом Гольдбергера [6]:

$$\psi^{\Lambda_i}(\xi t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \cdot \int_{-\infty}^0 dt' \cdot \int d\xi' \cdot e^{\eta t'} \cdot G^{(N)}(\xi t, \xi' t') \psi_{\Lambda_i}^{\circ}(\xi' t'). \quad (3)$$

Предельный переход (3) эквивалентен использованию волновых пакетов, так как оператор $\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \cdot \int_{-\infty}^0 e^{\eta t'} \dots dt'$ сводит к нулю все несущественные с физической точки зрения переходные процессы, появляющиеся при внезапном включении полного взаимодействия $V(\xi)$.

Уравнения для функций Грина

Для получения уравнений воспользуемся техникой квантовой теории поля. Введем операторы «поля» $\widehat{\Psi}(\xi t)$ в гейзенберговском представлении:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \widehat{\Psi}(\xi t) - [\widehat{H}, \widehat{\Psi}(\xi t)] &= 0, \\ [\widehat{\Psi}(\xi t), \widehat{\Psi}^+(\xi' t)] &= \delta(\xi - \xi'), \\ \widehat{H} &= \int d\xi \widehat{\Psi}^+(\xi t) \cdot H(\xi) \cdot \widehat{\Psi}(\xi t). \end{aligned} \quad (4)$$

Состояние вакуума $|0\rangle$ определим как состояние без частиц. Функция Грина, как известно, выражается через T -упорядоченное произведение операторов поля:

$$G^{(N)}(\xi t, \xi' t') = \langle 0 | T \{ \widehat{\Psi}(\xi t), \widehat{\Psi}^+(\xi' t') \} | 0 \rangle. \quad (5)$$

Определим также «кластерную» функцию Грина

$$G_{\Lambda_i}^{(N)}(\xi t, \xi' t') = \langle 0 | T \{ \widehat{\Psi}_{\Lambda_i}(\xi t), \widehat{\Psi}_{\Lambda_i}^+(\xi' t') \} | 0 \rangle$$

уравнения (2). (Здесь операторы $\widehat{\Psi}_{\Lambda_i}(\xi t)$ определяются равенствами (4) с гамильтонианом K_{Λ_i} вместо \widehat{H} .)

Перейдем к представлению взаимодействия с помощью унитарного оператора $\widehat{U}_{\Lambda_i}(t) = e^{i \widehat{K}_{\Lambda_i} t} e^{-i \widehat{H} t}$:

$$\widehat{\Psi}_{\Lambda_i}^{\Lambda_i}(\xi t) = \widehat{U}_{\Lambda_i}(t) \widehat{\Psi}(\xi t) \widehat{U}_{\Lambda_i}^{-1}(t). \quad (6)$$

Очевидно, функцию $G_{\Lambda_i}^{(N)}(\xi t, \xi' t')$ можно было бы определить и с помощью операторов (6):

$$G_{\Lambda_i}^{(N)}(\xi t, \xi' t') = \langle 0 | T \{ \widehat{\Psi}_{\Lambda_i}^{\Lambda_i}(\xi t) \widehat{\Psi}_{\Lambda_i}^{\Lambda_i+}(\xi' t') \} | 0 \rangle.$$

Рассмотрим U -матрицу (оператор сдвига в представлении взаимодействия):

$$\widehat{U}_{\Lambda_i}(t, t') = \widehat{U}_{\Lambda_i}(t) \widehat{U}_{\Lambda_i}^{-1}(t').$$

Как известно [6], U -матрица удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \widehat{U}_{\Lambda_i}(t, t') &= \widehat{I} + (-i) \int_{t'}^t \widehat{V}^{\Lambda_i}(t^{(1)}) \widehat{U}_{\Lambda_i}(t^{(1)}, t') dt^{(1)} = \\ &= \widehat{I} + (-i) \int_{t'}^t \widehat{U}_{\Lambda_i}(t, t^{(1)}) \widehat{V}^{\Lambda_i}(t^{(1)}) dt^{(1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\widehat{V}^{\Lambda_i}(t)$ — взаимодействие между частицами из разных кластеров (в представлении взаимодействия):

$$\widehat{V}^{\Lambda_i}(t) = \int \widehat{\Psi}_{\Lambda_i}^{\Lambda_i+}(\xi t) V^{\Lambda_i}(\xi) \widehat{\Psi}_{\Lambda_i}^{\Lambda_i}(\xi t) d\xi,$$

$$V^{\Lambda_i}(\xi) = V(\xi) - V_{\Lambda_i}(\xi).$$

Перейдем к представлению взаимодействия в определении (5). Мы получим

$$G^{(N)}(\xi t, \xi' t') = \langle 0 | T \{ \hat{\Psi}_I^{\Lambda_i}(\xi t) \hat{\Psi}_I^{\Lambda_i \dagger}(\xi' t') \hat{U}_{\Lambda_i}(\infty, -\infty) \} | 0 \rangle. \quad (8)$$

Подстановка представления (7) в равенство (8) дает следующее интегральное уравнение для функции Грина:

$$\begin{aligned} G^{(N)}(\xi t, \xi' t') &= G_{\Lambda_i}^{(N)}(\xi t, \xi' t') + (-i) \int_{-\infty}^{\infty} dt^{(1)} \int d\xi^{(1)} G^{(N)}(\xi t, \xi^{(1)} t^{(1)}) V^{\Lambda_i}(\xi^{(1)}) \times \\ &\quad \times G_{\Lambda_i}^{(N)}(\xi^{(1)} t^{(1)}, \xi' t') = G_{\Lambda_i}^{(N)}(\xi t, \xi' t') + \\ &\quad + (-i) \int_{-\infty}^{\infty} dt^{(1)} \int d\xi^{(1)} G_{\Lambda_i}^{(N)}(\xi t, \xi^{(1)} t^{(1)}) V^{\Lambda_i}(\xi^{(1)}) G^{(N)}(\xi^{(1)} t^{(1)}, \xi' t'). \end{aligned} \quad (9)$$

Ядро уравнения (9) является сингулярным и соответствующее однородное уравнение имеет непрерывный спектр, обусловленный существованием асимптотик в каналах Λ_j , не удовлетворяющих условию

$$V_{\Lambda_j} \in V_{\Lambda_i}.$$

Для того чтобы устранить неоднозначность, вносимую каналами Λ_j в решение неоднородного уравнения (9), достаточно потребовать [7], чтобы функция Грина удовлетворяла одновременно всем уравнениям (9), записанным для всех возможных каналов Λ_i ($i=2, 3, \dots$). После этого останется единственная неоднозначность в решении системы (9), которая соответствует дискретному спектру связанных состояний (канал Λ_1).

S-матрица

Определение S-матрицы. Под индексом Λ_i можно подразумевать набор квантовых чисел в канале и определить матричный элемент перехода из состояния Λ_i в состояние Λ_j с помощью соотношения, аналогичного формуле (3)

$$\langle S_{\Lambda_j \Lambda_i} \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \int_0^{\infty} e^{-\eta t} dt \int d\xi \psi_{\Lambda_j}^{\circ}(\xi t) \psi^{\Lambda_i}(\xi t).$$

Определим амплитуду $\tilde{T}^{(N)}(\xi t, \xi' t')$:

$$\begin{aligned} G^{(N)}(\xi t, \xi' t') &= G_0^{(N)}(\xi t, \xi' t') + \int_{-\infty}^{\infty} dt^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} dt^{(2)} \int d\xi^{(1)} \int d\xi^{(2)} \\ &\quad G_0^{(N)}(\xi t, \xi^{(1)} t^{(1)}) \tilde{T}^{(N)}(\xi^{(1)} t^{(1)}, \xi^{(2)} t^{(2)}) G_0^{(N)}(\xi^{(2)} t^{(2)}, \xi' t') \end{aligned}$$

(здесь $G_0^{(N)} \equiv G_{\Lambda_N}^{(N)}$) и введем вспомогательные функции

$$\psi_{\Lambda_i}^{\eta}(\xi t) = \eta \int_{-\infty}^0 e^{\eta t'} dt' \int d\xi' G_0^{(N)}(\xi t, \xi' t') \psi_{\Lambda_i}^{\circ}(\xi' t').$$

Матричные элементы $\langle S_{\Lambda_j \Lambda_i} \rangle$ следующим образом выражаются через $\tilde{T}^{(N)}$ и $\psi_{\Lambda_i}^{\eta}$:

$$\langle S_{\Lambda_j \Lambda_i} \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\xi \int d\xi' \psi_{\Lambda_j}^{\eta}(\xi t) S(\xi t, \xi' t') \psi_{\Lambda_i}^{\eta}(\xi' t'), \quad (10)$$

где

$$S(\xi t, \xi' t') = \delta(\xi - \xi') \delta(t - t') \delta(t) + \tilde{T}^{(N)}(\xi t, \xi' t').$$

Переходить к пределу в равенстве (10) можно только после интегрирования. Функцию $S(\xi t, \xi' t')$ будем называть S -матрицей в координатно-временном представлении. Все дальнейшие выкладки можно производить в операторном виде, рассматривая функции $G(\xi t, \xi' t')$, $S(\xi t, \xi' t')$, $\tilde{T}(\xi t, \xi' t')$ как интегральные ядра операторов G , S , \tilde{T} . Умножению операторов соответствует интегрирование по координатам (ξ) и времени t . Единичный оператор 1 имеет ядро $\delta(\xi - \xi') \delta(t - t')$, а оператор V имеет ядро $(-i) \cdot V(\xi) \cdot \delta(\xi - \xi') \delta(t - t')$.

Алгебру операторов мы дополним еще одной операцией. Рассмотрим очевидное равенство

$$G_{\Lambda_i}^{(N)}(\xi t, \xi' t') = G^{(n_1)}(\xi_1 t, \xi'_1 t') \cdot G^{(n_2)}(\xi_2 t, \xi'_2 t') \cdot \dots \cdot G^{(n_i)}(\xi_i t, \xi'_i t'). \quad (11)$$

Простое произведение операторов, действующих в непересекающихся частях конфигурационного пространства, будем обозначать символом $*$, чтобы не путать его с операторным произведением.

Разложение S -матрицы по типам связности. Уравнения (9) содержат в качестве неоднородных членов функции Грина (11), которые будем называть несвязными частями [3] (им соответствуют несвязные фейнмановские графики). Нас интересует разложение функции Грина по типам связности. Тип связности также можно обозначать индексом Λ_i . Для функции Грина $G_{\Lambda_i}^{(N)}$ можно получить уравнение, аналогичное уравнению (9):

$$G_{\Lambda_i}^{(N)} = G_{\Lambda_j}^{(N)} + G_{\Lambda_i}^{(N)} (V^{\Lambda_j} - V^{\Lambda_i}) G_{\Lambda_j}^{(N)}, \quad V_{\Lambda_j} \in V_{\Lambda_i}, \quad (12)$$

которое показывает, что $G_{\Lambda_i}^{(N)}$ включает в себя смесь различных типов связности Λ_j , удовлетворяющих условию $V_{\Lambda_j} \in V_{\Lambda_i}$. Введем амплитуды $T_{\Lambda_i}^{(N)}$ тип связности которых точно совпадает с типом связности разбиения Λ_i :

$$\tilde{T}^{(N)} = \sum_{\Lambda_{N-1}} T_{\Lambda_{N-1}}^{(N)} + \sum_{\Lambda_{N-2}} T_{\Lambda_{N-2}}^{(N)} + \dots + \sum_{\Lambda_2} T_{\Lambda_2}^{(N)} + T_{\Lambda_1}^{(N)}. \quad (13)$$

С помощью амплитуд $T_{\Lambda_i}^{(N)}$ можно записать разложение функции Грина по типам связности:

$$G^{(N)} = G_0^{(N)} + G_0^{(N)} \left\{ \sum_{\Lambda_{N-1}} T_{\Lambda_{N-1}}^{(N)} + \sum_{\Lambda_{N-2}} T_{\Lambda_{N-2}}^{(N)} + \dots + \sum_{\Lambda_2} T_{\Lambda_2}^{(N)} \right\} G_0^{(N)} + G_0^{(N)} T_{\Lambda_1}^{(N)} G_0^{(N)}. \quad (14)$$

Аналогичные соотношения можно записать для «кластерных» функций Грина:

$$G_{\Lambda_i}^{(N)} = G_0^{(N)} + G_0^{(N)} \tilde{T}_{\Lambda_i}^{(N)} G_0^{(N)},$$

$$\tilde{T}_{\Lambda_i}^{(N)} = \sum_{j=(i+1)}^{N-1} \sum_{\Lambda_j \in \Lambda_i} T_{\Lambda_j}^{(N)} + T_{\Lambda_i}^{(N)}, \quad V_{\Lambda_j} \in V_{\Lambda_i}. \quad (15)$$

Равенства (12) — (15) однозначно определяют амплитуды $T_{\Lambda_i}^{(N)}$. В самом деле, все $T_{\Lambda_i}^{(N)}$ на основании этих равенств и очевидных соотношений: $T_{\Lambda_1}^{(2)} = \tilde{T}_{\Lambda_1}^{(2)}$, $T_{\Lambda_{N-1}}^{(N)} = T_{\Lambda_1}^{(2)} * G_0^{(N-2)}$,

$$T_{\{n, N-n\}}^{(N)} = T_{\Lambda_1}^{(n)} * G_0^{(N-n)} T_{\Lambda_1}^{(N-n)} G_0^{(N-n)} + G_0^{(n)} T_{\Lambda_1}^{(n)} * T_{\Lambda_1}^{(N-n)} G_0^{(N-n)} + \\ + T_{\Lambda_1}^{(n)} G_0^{(n)} * G_0^{(N-n)} T_{\Lambda_1}^{(N-n)} + G_0^{(n)} T_{\Lambda_1}^{(n)} G_0^{(n)} * T_{\Lambda_1}^{(N-n)}$$

можно определить по индукции, начиная с $N=2$. Например,

$$T_{\Lambda_2}^{(3)} = T_{\Lambda_1}^{(2)} * G_0^{(1)}; \quad T_{\Lambda_3}^{(4)} = T_{\Lambda_1}^{(2)} * G_0^{(2)}; \quad T_{\Lambda_2}^{(4)} = T_{\Lambda_1}^{(3)} * G_0^{(1)}, \quad \Lambda_2 = \{3, 1\}; \\ T_{\Lambda_2}^{(4)} = T_{\Lambda_1}^{(2)} * G_0^{(2')} T_{\Lambda_1}^{(2')} G_0^{(2')} + G_0^{(2)} T_{\Lambda_1}^{(2)} * T_{\Lambda_1}^{(2')} G_0^{(2')} + \\ + T_{\Lambda_1}^{(2)} G_0^{(2)} * G_0^{(2')} T_{\Lambda_1}^{(2')} + G_0^{(2)} T_{\Lambda_1}^{(2)} G_0^{(2)} * T_{\Lambda_1}^{(2')}, \quad \Lambda_2 = \{2, 2'\}.$$

Определение ветвей амплитуды. Перепишем уравнение (9) для амплитуды

$$\tilde{T}^{(N)} = \tilde{T}_{\Lambda_i}^{(N)} + (I + \tilde{T}^{(N)} G_0^{(N)}) V^{\Lambda_i} (I + G_0^{(N)} \tilde{T}_{\Lambda_i}^{(N)}). \quad (16)$$

Подставим в (16) разложение (15). Тогда получим

$$\tilde{T}^{(N)} = (I + \tilde{T}^{(N)} G_0^{(N)}) V^{\Lambda_i} + [I + (I + \tilde{T}^{(N)} G_0^{(N)}) V^{\Lambda_i} G_0^{(N)}] \times \\ \times \sum_{j=(i+1)}^{N-1} \sum_{\Lambda_j \in \Lambda_i} T_{\Lambda_j}^{(N)} + [I + (I + \tilde{T}^{(N)} G_0^{(N)}) V^{\Lambda_i} G_0^{(N)}] T_{\Lambda_i}^{(N)}. \quad (17)$$

Вычислим по формуле (10) матричный элемент перехода $\langle S_{\Lambda_N \Lambda_i} \rangle$. При этом воспользуемся следующей теоремой:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_{\Lambda_N}^\eta = \psi_{\Lambda_N}^\circ; \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} V^{\Lambda_i} (I + G_0^{(N)} \sum_{j=(i+1)}^{N-1} \sum_{\Lambda_j \in \Lambda_i} T_{\Lambda_j}^{(N)}) \psi_{\Lambda_i}^\eta = 0. \quad (18)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} G_0^{(N)} T_{\Lambda_i}^{(N)} \psi_{\Lambda_i}^\eta = \psi_{\Lambda_i}^\circ; \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} T_{\Lambda_i}^{(N)} \psi_{\Lambda_i}^\eta = V_{\Lambda_i} \psi_{\Lambda_i}^\circ. \quad (19)$$

Доказательство теоремы легко получить, используя очевидное равенство

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \int_{-\infty}^0 e^{\eta t'} dt' \int d\xi' G_{\Lambda_j}(\xi t, \xi' t') \psi_{\Lambda_i}^\circ(\xi' t') = \begin{cases} 0, & V_{\Lambda_j} \in V_{\Lambda_i}, j \geq i+1; \\ \psi_{\Lambda_i}^\circ(\xi t), & \Lambda_j \equiv \Lambda_i. \end{cases}$$

Из соотношений (18) следует, что ненулевой вклад в матричный элемент $\langle S_{\Lambda_N \Lambda_i} \rangle$ дает только третье слагаемое из разложения (17).

Мы обозначим соответствующую амплитуду $\tilde{T}_{\Lambda_N \Lambda_i \Lambda_i}^{(N)}$ (индексы $\Lambda_N \Lambda_i \Lambda_i$ показывают здесь последовательность включения и выключения взаимодействия; знак тильда над буквой T ставится в том случае, если в амплитуду входят члены различной связности):

$$\tilde{T}_{\Lambda_N \Lambda_i \Lambda_i}^{(N)} = T_{V_i}^{(N)} + (I + \tilde{T}^{(N)} G_0^{(N)}) V^{\Lambda_i} G_0^{(N)} T_{\Lambda_i}^{(N)}. \quad (20)$$

Определение (20) можно обобщить на случай перехода в любой другой канал Λ_j :

$$\tilde{T}_{\Lambda_j \Lambda_1 \Lambda_i}^{(N)} = \delta(\Lambda_j, \Lambda_i) T_{\Lambda_i}^{(N)} + T_{\Lambda_j}^{(N)} G_0^{(N)} V^{\Lambda_j} (G_0^{(N)} + G_0^{(N)} \tilde{T}^{(N)} G_0^{(N)}) V^{\Lambda_i} G_0^{(N)} T_{\Lambda_i}^{(N)}. \quad (21)$$

Таким образом, равенства (20) и (21) определяют ветви S-матрицы (или амплитуды), ответственные за переход из канала Λ_i в канал Λ_j :

$$\langle S_{\Lambda_j \Lambda_i} \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_{\Lambda_j}^\eta S_{\Lambda_j \Lambda_i} \psi_{\Lambda_i}^\eta, \\ S_{\Lambda_j \Lambda_i} = \delta(\Lambda_j, \Lambda_i) I + \tilde{T}_{\Lambda_j \Lambda_1 \Lambda_i}. \quad (22)$$

Предельный переход $\eta \rightarrow 0$ в равенстве (22) можно осуществить, используя представление (21) и равенство (19). В результате справа и слева выражения (21) появятся множители $\psi_{\Lambda_N} V_{\Lambda_i} \psi_{\Lambda_i}$ и $\psi_{\Lambda_j} V_{\Lambda_j} \psi_{\Lambda_N}$, которые нетрудно отождествить (после факторизации δ -функций сохранения энергии и импульса) с амплитудами виртуального распада кластеров из разбиений Λ_i и Λ_j на свободные частицы.

Цепочки разбиений и структурные диаграммы. Амплитуда $\tilde{T}_{\Lambda_j \Lambda_1 \Lambda_i}^{(N)}$ обладает определенной топологической структурой, которая отражена в цепочке разбиений $\Lambda_j \Lambda_1 \Lambda_i$. Эту цепочку можно продолжить влево и право вплоть до Λ_N . Например, написав для $T_{\Lambda_i}^{(N)}$ разложение, аналогичное разложению (17), и подставив его в определение (20), мы можем определить амплитуду

$$\tilde{T}_{\Lambda_N \Lambda_1 \Lambda_i \Lambda_{i+k}}^{(N)} = T_{\Lambda_i \Lambda_{i+k}}^{(N)} + (I + \tilde{T}^{(N)} G_0^{(N)}) V^{\Lambda_i} G_0^{(N)} T_{\Lambda_i \Lambda_{i+k}}^{(N)}, \quad V_{\Lambda_{i+k}} \in V_{\Lambda_i}, \quad (23)$$

где

$$T_{\Lambda_i \Lambda_{i+k}}^{(N)} = T_{\Lambda_i}^{(N)} G_0^{(N)} (V^{\Lambda_{i+k}} - V^{\Lambda_i}) G_0^{(N)} T_{\Lambda_{i+k}}^{(N)}.$$

Цепочку разбиений, начинающуюся с разбиения Λ_i и оканчивающуюся разбиением Λ_N , мы будем обозначать символом

$$\lambda_i = \{\Lambda_i \Lambda_j \dots \Lambda_N\}, \quad j > i, \quad V_{\Lambda_j} \in V_{\Lambda_i}.$$

Продолжая процедуру перехода от определения (20) к определению (23) и далее, мы найдем амплитуды $\tilde{T}_{\Lambda_N \Lambda_1 \lambda_i}^{(N)}$ и $\tilde{T}_{\lambda_j \Lambda_1 \lambda_i}^{(N)}$.

Задача состоит в том, чтобы получить обобщение уравнений Фаддеева на случай произвольного N . В работе [8] было показано, что метод суммирования фейнмановских диаграмм приводит к уравнениям типа

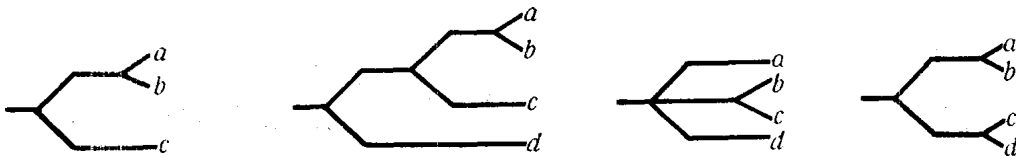


Рис 1. Структурные диаграммы в случае $N=3$ и 4

Фаддеева. Поэтому будем рассматривать только такие цепочки разбиений $\{\Lambda_1 \lambda_i\}$, которые отображают последовательность включения взаимодействия в фейнмановских графиках. Как известно, такие последовательности изображают с помощью структурных диаграмм. Например, на рис. 1 изображены все структурные диаграммы в системах $N=3$ и 4.

Не будем останавливаться на общеизвестных правилах построения структурных диаграмм.

Заметим только, что, начиная с $N=4$, существует заметная разница между структурными диаграммами в стационарной и нестационарной теориях, о чем уже упоминалось в предисловии. Для сравнения на рис. 2 изображена пара структурных диаграмм, которые в стационарной теории вносят различный вклад в S -матрицу, а в фейнмановской теории совпадают.

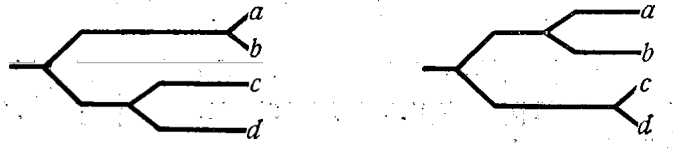


Рис. 2. Структурные диаграммы в стационарной теории

Система уравнений для амплитуд

Систему уравнений для амплитуд $\tilde{T}_{\Lambda_N \Lambda_i \lambda_i}^{(N)}$ можно получить из рассмотрения всех возможных, топологически не эквивалентных соединений связанных структурных диаграмм $\{\Lambda_i \lambda_i\}$ с несвязными структурными диаграммами $\{\lambda_j, \lambda_j\}$. На рис. 3 изображены все несвязные структурные диаграммы в системах $N=3$ и 4, и на рис. 4 изображены

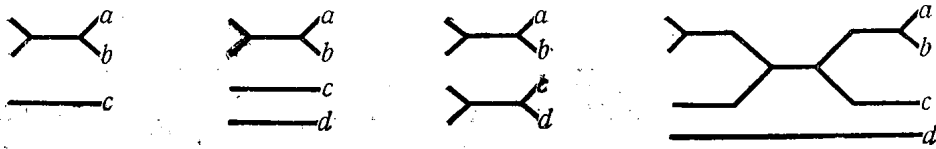


Рис. 3. Несвязные структурные диаграммы $N=3$ и 4

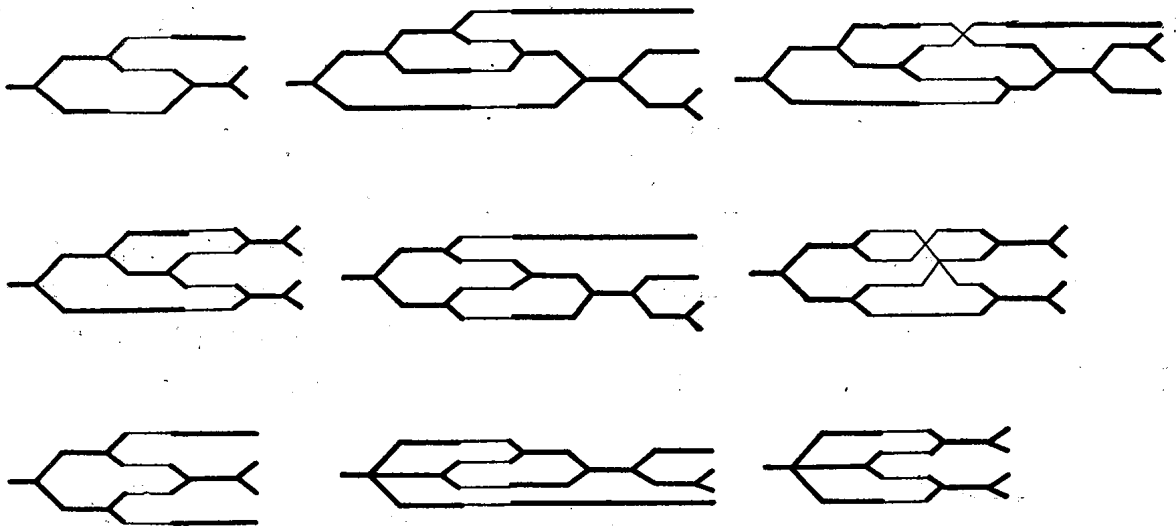


Рис. 4. Все возможные типы соединения связанных и несвязных структурных диаграмм $N=3$ и 4

все топологически не эквивалентные соединения их со связными структурными диаграммами, изображенными на рис. 1. В случае произвольного N все допустимые соединения структурных диаграмм $\{\Lambda_i \lambda_i\}$ с диаграммами $\{\lambda_j, \lambda_j\}$ можно описать с помощью матрицы $(A^{(N)})$ с матричными элементами.

$$A_{\lambda_i \lambda_j}^{(N)} = \begin{cases} 1, & \text{если соединение допустимо,} \\ 0, & \text{если соединение не допустимо.} \end{cases}$$

Правило, по которому можно определить, в каких случаях соединение диаграмм является допустимым, можно сформулировать на языке структурных диаграмм следующим образом:

В результате соединения диаграмм $\{\Lambda_1 \lambda_i\}$ и $\{\lambda_j, \lambda'_j\}$ образуется новая структурная диаграмма $\{\Lambda_1 \lambda'_j\}$. Это можно записать символически так:

$$\{\Lambda_1 \lambda_i\} \times \{\lambda_j, \lambda'_j\} = \{\Lambda_1 \lambda'_j\}. \quad (24)$$

При соединении (24) не должно образовываться замкнутых петель, которые связаны с остальными частями диаграммы только двумя линиями (в противном случае будут учтены лишние диаграммы).

В качестве иллюстрации этих правил на рис. 5 изображены запре-

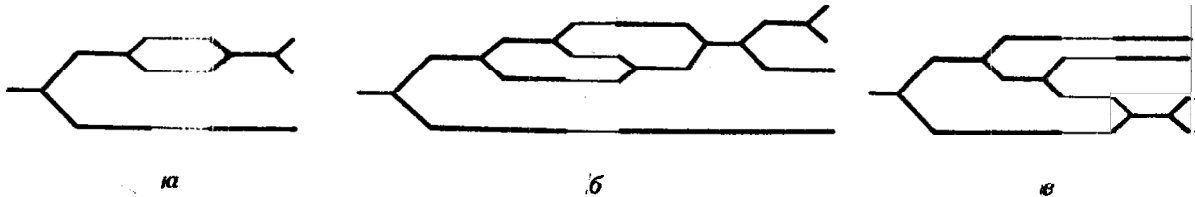


Рис. 5. Запрещенные соединения диаграмм $N=3$ и 4

щенные соединения структурных диаграмм. Соединения на рис. 5, а и б приводят к образованию замкнутых петель. В результате соединения диаграмм на рис. 5, в образуется новая структурная диаграмма, которая не удовлетворяет соотношению (24).

Систему связанных уравнений для амплитуд $T_{\Lambda_N \Lambda_1 \lambda_i}^{(N)}$ можно записать с помощью матрицы $(A^{(N)})$:

$$\tilde{T}_{\Lambda_N \Lambda_1 \lambda_i}^{(N)} = T_{\lambda_i}^{(N)} + \sum_{\lambda_j \in \mathcal{L}_{\Lambda_1}^{(N)}} \sum_{\lambda'_j \in \mathcal{L}_{\Lambda_1}^{(N)}} \tilde{T}_{\Lambda_N \Lambda_1 \lambda_j}^{(N)} G_0^{(N)} A_{\lambda_j \lambda'_j} T_{\lambda'_j}^{(N)}; \quad (25)$$

$$\tilde{T}^{(N)} = \sum_{\lambda_i \in \mathcal{L}_{\Lambda_1}^{(N)}} T_{\Lambda_N \Lambda_1 \lambda_i}^{(N)} + \sum_{\Lambda_j \in L^{(N)}} T^{(N)}. \quad (26)$$

Здесь через $\mathcal{L}_{\Lambda_1}^{(N)}$ обозначено множество цепочек разбиений $\{\Lambda_1 \lambda_i\}$, соответствующих всем возможным связным структурным диаграммам в системе; $\mathcal{L}_{\Lambda_1 \Lambda_i}^{(N)}$ — множество всех цепочек разбиений $\{\Lambda_1 \lambda_i\}$, в которых цепочка λ_i начинается с разбиения Λ_i , $L^{(N)}$ состоит из разбиений λ_i .

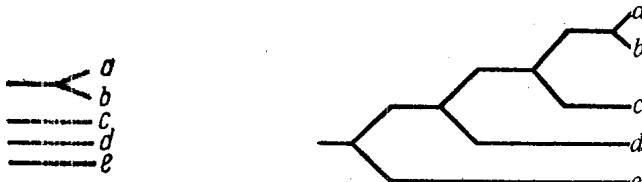


Рис. 6. Диаграмма $\{\Lambda_4, \Lambda_5\}$

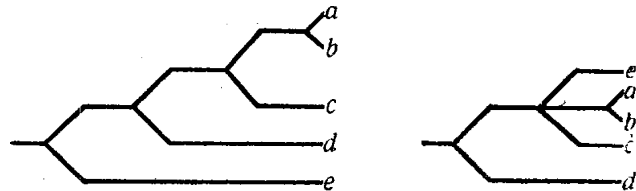


Рис. 7. Структурные диаграммы $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5\}$ и $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_4, \Lambda_5\}$

для которых цепочки разбиений $\{\Lambda_1 \Lambda_i \dots \Lambda_N\}$ противоречат правилам построения структурных диаграмм. Разбиения такого типа появляются, начиная с $N=5$. Для иллюстрации на рис. 6 изображена структурная диаграмма $\{\Lambda_4 \Lambda_5\}$ в системе $N=5$, а на рис. 7 показаны все те связные

структурные диаграммы, в которые может входить диаграмма $\{\Lambda_4\Lambda_5\}$. Среди них нет ни одной диаграммы типа $\{\Lambda_1\Lambda_4\Lambda_5\}$.

Система уравнений (25) — (26), записанная в импульсно-энергетическом представлении, после факторизации δ -функций сохранения энергии и импульса совпадает с уравнениями Фаддеева [1] при $N=3$. Как и следовало ожидать, при $N \geq 4$ эта система отличается от уравнений Якубовского [2].

Для доказательства справедливости уравнений (25) — (26) достаточно воспользоваться определениями (21) и (23) для амплитуд $\tilde{T}_{\Lambda_N \Lambda_i \Lambda_j}^N$ и уравнениями (16) для полной амплитуды $\tilde{T}^{(N)}$. В следующей статье будет дано такое доказательство для $N=3$ и 4. Для $N \geq 5$ вывод уравнений (25) — (26) операторным методом трудно осуществить из-за сложности выкладок. Поэтому сформулированные выше чисто топологические правила вычисления матрицы $(A^{(N)})$ могут оказаться полезными.

Автор выражает благодарность А. М. Поповой и В. В. Комарову за постоянные советы и обсуждение результатов данной работы. Автор благодарит также Л. Д. Фаддеева и О. Якубовского за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, **39**, 1459, 1960.
2. Якубовский О. «Ядерная физика», **5**, вып. 6, 1967.
3. Weinberg S. Phys., Rev., **133**, B232, 1964.
4. Гугенгольц Н. Квантовая теория систем многих тел. М., «Мир», 1967.
5. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ, **45**, 214, 1963; ЖЭТФ, **46**, 2112, 1964; «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 1969.
6. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. М., «Мир», 1967.
7. Ведринский В. В. «Ядерная физика», **3**, вып. 3, 569, 1966.
8. Комаров В. В., Обуховский А. Т., Попова А. М. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 1968.
9. Federbush P. Phys. Rev., **148**, 155, 1966; Noble G. Phys. Rev., **148**, 1553, 1966.
10. Omnes R. Phys. Rev., **165**, 1265, 1968.
11. Фаддеев Л. Д. Труды МИАН, **69**, 1963.

Поступила в редакцию
25.6 1968 г.

НИИЯФ