

В. С. ПОТАПОВ, А. М. БРОДСКИЙ, В. В. ТОЛМАЧЕВ

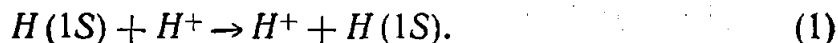
АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ПЕРЕЗАРЯДКИ В НИЗШИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

Члены первого порядка

В работе вычислена амплитуда реакции перезарядки $H(1S) + H^+ \rightarrow H^+ + H(1S)$ в пределе высоких скоростей налетающего протона в первом порядке теории возмущений. Результаты сравниваются со вторым и третьим порядками, а также указываются неточности в выражении для этой амплитуды. Предлагается общий метод изучения асимптотик интегралов, встречающихся в низших порядках при разложении амплитуды перезарядки в ряд теории возмущений.

Введение

В настоящей работе изучается поведение амплитуды нерелятивистского рассеяния быстрого протона H^+ на атоме водорода $H(1S)$ с обменным электроном, т. е. простейшая реакция перезарядки



Как известно [5], первое выражение для сечения реакции (1) было получено Бринкманом и Крамерсом [1], которые в первом порядке теории возмущений учли лишь взаимодействие протона с электроном V_{pe} , пренебрегая взаимодействием протонов V_{pp} . Ими было найдено следующее выражение для сечения:

$$Q_{BK} = \frac{2^{18}}{5} \left(\frac{v_0}{v} \right)^{12} \pi r_0^2, \quad (2)$$

где v_0 — скорость, соответствующая энергии основного состояния атома водорода, v — относительная скорость налетающего протона, r_0 — борковский радиус.

Взаимодействие протонов V_{pp} было учтено впервые Джексоном и Шиффом [2], однако при оценке соответствующих интегралов ими был опущен вклад от важной области углов $\theta \approx \pi$. В результате в [2] было получено выражение для сечения $Q_{DS} = 0,66 Q_{BK}$.

Вклад области $\theta \approx \pi$ в выражение для сечения в первом порядке был рассмотрен Маплтоном [4]. Им показано, что дифференциальное сечение первого порядка имеет острый максимум при $\theta \approx \pi$, и при $v \rightarrow \infty$ указанная область дает основной вклад в полное сечение, так что $Q \sim 1/v^6$ при достаточно больших v .

Вклады членов второго порядка в сечении реакции (1) впервые изучались Дриско [3]. Не рассмотрев специально области углов $\theta \approx \pi$ и фактически пренебрегая различием приведенной и полной массы электрона, Дриско установил наличие тождественной компенсации отдельных членов второго порядка $V_{pp}G_0V_{pe} + V_{pe}G_0V_{pp}$ с членом первого порядка V_{pp} . Подробно исследовав область малых углов, в которой дифференциальное сечение определяется оставшимся членом второго порядка $V_{pe}G_0V_{pe}$, Дриско нашел, что при $v \rightarrow \infty$ эта область дает главный вклад в полное сечение, так что фактически $Q \sim 1/v^{11}$. Таким образом, Дриско получил, что при $v \rightarrow \infty$ члены второго порядка дают вклад в полное сечение более существенный, чем члены первого порядка. Результаты, полученные в [3], неоднократно проверялись впоследствии. В частности, Маплтон [6] подтвердил в основном данные Дриско, отметив, однако, что область углов $\theta \approx \pi$ требует дальнейшего исследования.

В настоящей работе более подробно, чем в [3] и [6], изучаются вклады отдельных членов второго порядка теории возмущений в дифференциальное и полное сечение реакции (1), рассматривается общий метод получения асимптотических оценок соответствующих сингулярных интегралов, встречающихся в отдельных членах ряда теории возмущений при $v \rightarrow \infty$, а также проводится оценка важности вкладов членов третьего порядка.

Показано, что в отличие от [3] и [6] нет тождественной компенсации вкладов члена первого порядка V_{pp} и соответствующих членов второго порядка $V_{pp}G_0V_{pe}$ и $V_{pe}G_0V_{pp}$. Происходит лишь частичная компенсация ведущих вкладов членов

$$V_{pp} + V_{pp}G_0V_{pe} + V_{pe}G_0V_{pp} \quad (3)$$

в области углов $0 \leq \theta \ll \pi$, причем в результате компенсации ведущий вклад суммы (3) в сечении при $v \rightarrow \infty$ оказывается в $(m_e/m_p)^2$ раз меньше, чем вклад от каждого слагаемого в отдельности. Однако было бы необосновано пренебрегать вкладом суммы (3), поскольку, во-первых, она дает ведущий вклад в сечение $Q \sim 1/v^{12}$ при $v \rightarrow \infty$ такого же порядка, как и вклад от членов $V_{pe} + V_{pe}G_0V_{pe}$ (член $V_{pp}G_0V_{pp}$ дает меньший вклад в сечение), и, во-вторых, в общей области углов $0 \ll \theta \ll \pi$ вклад от (3) в дифференциальное и полное сечения при $v \rightarrow \infty$, несмотря на частичную компенсацию, оказывается все же приблизительно в $(m_p/m_e)^6$ раз большим, чем вклад от членов $V_{pe} + V_{pe}G_0V_{pe}$.

Существенное отличие нашего расчета от расчетов [3] и [6] заключается также в правильном учете важных вкладов в сечение, происходящих от области углов $\theta \approx \pi$. Нами выяснено, что в этой недостаточно исследованной области углов нет даже частичной компенсации вкладов члена первого порядка V_{pp} и членов второго порядка. Главный вклад в полное сечение $Q \sim 1/v^6$, который и определяет поведение сечения при достаточно больших v , происходит от члена первого порядка V_{pp} , в то время как члены второго порядка дают меньший вклад.

Следовательно, возникшая в связи с [3] «катастрофа» с неприменимостью борновского разложения для расчета полного сечения в пределе $v \rightarrow \infty$ в рассматриваемой задаче не имеет места. Для получения асимптотического поведения дифференциального сечения в общей области углов нельзя, однако, ограничиться первым членом борновского разложения.

В наших расчетах выясняется, существует ли реально область применимости первого борновского приближения для полного сечения и насколько оправдано сравнение результатов, полученных в этом приближении, с экспериментом. Асимптотическое поведение сечения реакции

(1) в первом и втором порядках теории возмущения определяется вкладом от члена первого порядка V_{pp} в области углов $\theta \approx \pi$ при $v \rightarrow \infty$. Однако из-за наличия перед ведущей асимптотикой весьма малого коэффициента порядка $(m_e/m_p)^2$ вклад этот становится существенным лишь при достаточно больших v . При не слишком больших v следует также учитывать вклад от области малых углов, происходящий от членов $V_{pe} + V_{pe} G_0 V_{pe}$. Фактически вклад от области $\theta \approx \pi$ начинает сказываться с энергий выше 3 Мэв, давая, например, при $E=10$ Мэв уже около 30% вклада в полное сечение; причем при $E=10$ Мэв релятивистские поправки еще малы и составляют менее 3% полного сечения, согласно оценкам, приведенным в работе [7]. Таким образом, существует область достаточно высоких энергий, в которой возможно сравнение результатов нашего нерелятивистского расчета с экспериментом, причем в этой области энергий необходимо учитывать вклад члена первого порядка V_{pp} в полное сечение.

§ 1. Исходные формулы

Как известно [8], дифференциальное сечение рассматриваемой реакции (1) связано с матричным элементом матрицы перехода в системе центра масс соотношением

$$\frac{dQ_{if}}{d\Omega} = (2\pi)^4 \hbar^2 \mu_p^2 |T_{if}|^2, \quad (4)$$

где

$$T_{if} = \langle n_f \vec{k}_f | V_1 + V_3 - (V_1 + V_3) G \left(\frac{\vec{k}_i^2}{2\mu_p} - E_0 + i\epsilon \right) (V_2 + V_3) | \vec{k}_i n_i \rangle. \quad (5)$$

В этом выражении $|n_i \vec{k}_i\rangle$ — начальное состояние системы, описывающее свободное движение частицы 1 с импульсом \vec{k}_i относительно центра масс частиц 2, 3, находящихся в связанном состоянии, характеризуемом квантовыми числами n_i ; $|n_f \vec{k}_f\rangle$ — конечное состояние, при котором частица 2 движется с импульсом $-\vec{k}_f$ относительно центра масс частиц 1, 3, находящихся в связанном состоянии с квантовыми числами n_f ; причем частицы 1, 2 — протоны, с массами m_1 и m_2 (так что $m_1 = m_2 = m_p$); частица 3 — электрон с массой $m_3 = m_e$. Для μ_p в (4) и (5) имеем выражение $\mu_p = \frac{m_p(m_p + m_e)}{(2m_p + m_e)}$.

Пусть $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ — импульсы частиц 1, 2, 3 в системе центра масс. Удобно перейти от указанных импульсов к импульсам:

$$\vec{p}_1 = \vec{k}_1 \quad (6) \quad \text{и} \quad \vec{q}_1 = \frac{m_3 \vec{k}_2 - m_2 \vec{k}_3}{m_2 + m_3}. \quad (7)$$

Выражение (6) есть импульс частицы 1 относительно центра масс частиц 2, 3, выражение (7) — относительный импульс частиц 2, 3. Другие наборы импульсов $\vec{p}_2 \vec{q}_2$ и $\vec{p}_3 \vec{q}_3$ получаются из (6) и (7) циклической перестановкой индексов.

Во введенных переменных для начального и конечного состояний в случае, если атом водорода находится в основном состоянии, запишем

$$\begin{aligned}\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 | n_i \vec{k}_i \rangle &= \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{k}_i) \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{q_0^{5/2}}{[q_1^2 + q_0^2]^2}, \\ \langle \vec{p}_2 \vec{q}_2 | n_f \vec{k}_f \rangle &= \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{k}_f) \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{q_0^{5/2}}{[q_2^2 + q_0^2]^2},\end{aligned}\quad (8)$$

где q_0 — импульс электрона, соответствующий энергии основного состояния атома водорода $-E_0$ ($E_0 = q_0^2 / 2\mu_{ep}$), причем $\mu_{ep} = m_e m_p / m_e + m_p$ — приведенная масса электрона. Входящие в (5) потенциалы V_1, V_2, V_3 являются кулоновскими потенциалами, которые в импульсном представлении имеют вид

$$\langle \vec{p}_j \vec{q}_j | V_j | \vec{p}'_j \vec{q}'_j \rangle = \delta^3(\vec{p}_j - \vec{p}'_j) \frac{v_0}{2\pi^2} \frac{z_j}{(q_j - q'_j)^2} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

причем $z_1 = z_2 = -1$; $z_3 = 1$; $v_0 = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{q_0}{\mu_{ep}}$.

В формуле (5) $G(E + i\varepsilon)$ — функция Грина трехчастичного уравнения Шредингера, соответствующая асимптотике с расходящимися сферическими волнами при $\varepsilon \rightarrow 0$. Как известно, $G(E + i\varepsilon)$ удовлетворяет интегральному уравнению Липпмана—Швингера, при итерациях которого возникает разложение $G(E + i\varepsilon)$ в ряд теории возмущений, или борновский ряд. Приближение, используемое в настоящих расчетах, состоит в том, что при $\frac{v_0}{v} \rightarrow 0$ оставляются лишь первые два члена борновского ряда:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 | G(E + i\varepsilon) | \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \rangle \approx \langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 | G_0 - G_0(V_1 + V_2 + V_3)G_0 | \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \rangle, \quad (10)$$

где

$$\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 | G_0(E + i\varepsilon) | \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \rangle = \frac{\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{q}'_1)}{\frac{p_1^2}{2\mu_p} + \frac{q_1^2}{2\mu_{ep}} - E - i\varepsilon}, \quad (11)$$

причем $E = \frac{k_i^2}{2\mu_p} - E_0 = \frac{k_p^2}{2\mu_p} - E_0$; $\varepsilon \rightarrow 0$.

При подстановке (10) в исходную формулу (5) получим приближенное выражение для амплитуды перехода:

$$\begin{aligned}T_{if} &\approx \tilde{T}_{if} = \langle n_f \vec{k}_f | V_1 + V_3 - (V_1 + V_3)G_0(V_2 + V_3) + \\ &+ (V_1 + V_3)G_0(V_1 + V_2 + V_3)G_0(V_2 + V_3) | n_i \vec{k}_i \rangle \equiv T_{if}^{IB} - T_{if}^{IIB} + T_{if}^{IIIB}.\end{aligned}\quad (12)$$

§ 2. Асимптотики сингулярных интегралов

При рассмотрении фактически неисследованных для членов второго порядка области углов $\theta \approx \pi$, а также при вычислении ведущих вкладов отдельных членов в (12) при $v \rightarrow \infty$, необходимо знать асимптотическое поведение некоторых сингулярных интегралов, зависящих от малого параметра (обозначим его ν). Особенность каждого из таких интегралов состоит в том, что основной вклад в асимптотику при $\nu \rightarrow 0$ дают окрестности точек, в которых подынтегральное выражение становится

сингулярным при $\nu=0$. Эту окрестность без ограничения общности можно выбрать в виде шара с центром в точке сингулярности. При этом нужно различать следующие случаи. Если радиус R окрестности может быть выбран таким, что он мал по сравнению с расстоянием δ до соседней особенности и велик по сравнению с ν , то вклад от каждой особенности можно учитывать по отдельности. При этом часть подынтегрального выражения, несингулярная в выделенной области, разлагается в ряд по $\frac{R}{\delta}$ и оставляется первый член разложения. Если же $\delta \sim \nu$, то вклады от обеих особенностей следует учитывать совместно. При этом в случае необходимости может быть применен так называемый метод «растяжек» [9].

В качестве поясняющего примера изучим асимптотическое поведение следующего интеграла при $\nu \rightarrow 0$:

$$I = \int \frac{d\vec{q}}{[(\vec{q} - \vec{p}_1)^2 + \nu^2]^2 (\vec{q} - \vec{p}_0)^2 (q^2 - p_0^2 + \gamma^2 \nu^2 - i\epsilon)}, \quad (13)$$

где \vec{p}_1, \vec{p}_0 — фиксированные векторы, $p_1^2 \sim 1, p_0^2 \sim 1$; γ^2 — параметр, $\gamma^2 \sim 1$, а $i\epsilon$ задает способ обхода полюса и после выполнения вычислений положим $\epsilon \rightarrow 0$. Подынтегральное выражение имеет две особенности при $\nu \rightarrow 0$: точки $\vec{q} = \vec{p}_1, \vec{q} = \vec{p}_0$.

Пусть $|\vec{p}_1 - \vec{p}_0| = |\vec{\delta}| \gg \nu$. Тогда при $\nu \rightarrow 0$ главный вклад в интеграл дают следующие области: 1) $\Omega_{q=p_1} \rightarrow \rightarrow$ — шарообразная область достаточно малого радиуса R ($\nu \ll R \ll \delta$) с центром в точке \vec{p}_1 ; 2) $\Omega_{q=p_0} \rightarrow \rightarrow$ — область аналогичной формы и размеры с центром в точке \vec{p}_0 . Поскольку $\delta \gg \nu$, вклады от этих областей можно учитывать по отдельности, так что в данном случае:

$$I \approx \frac{1}{\delta^2} \int_{\Omega_{q=p_1} \rightarrow \rightarrow} \frac{d\vec{q}}{[(\vec{q} - \vec{p}_1)^2 + \nu^2]^2 (q^2 - p_0^2 + \gamma^2 \nu^2 - i\epsilon)} + \frac{1}{\delta^4} \int_{\Omega_{q=p_0} \rightarrow \rightarrow} \frac{d\vec{q}}{(\vec{q} - \vec{p}_0)^2 (q^2 - p_0^2 + \gamma^2 \nu^2 - i\epsilon)}. \quad (14)$$

Для нахождения ведущей асимптотики I при $\nu \rightarrow 0$ расширим область интегрирования $\Omega_{q=p_1} \rightarrow \rightarrow$ и $\Omega_{q=p_0} \rightarrow \rightarrow$ до всего пространства, что дает правильный ведущий член и может привести к погрешности лишь в константном члене по ν . Тогда, обозначив первый и второй интегралы в (14) соответственно через I_1 и I_2 , получим для главных членов асимптотик

$$I_1 \approx \frac{1}{\delta^2} \int \frac{d\vec{q}}{[(\vec{q} - \vec{p}_1)^2 + \nu^2]^2 (q^2 - p_0^2 + \gamma^2 \nu^2 - i\epsilon)} = \frac{\pi^2}{\delta^2 \nu [p_1^2 - p_0^2 - 2i\nu p_0]}, \quad (15)$$

$$I_2 \approx \frac{1}{\delta^4} \int \frac{d\vec{q}}{(\vec{q} - \vec{p}_0)^2 (q^2 - p_0^2 + \gamma^2 \nu^2 - i\epsilon)} \approx -\frac{i\pi^2}{\delta^4 p_0} \ln \nu^2. \quad (16)$$

Таким образом, при $\delta \gg \nu$ и $||\vec{p}_1| - |\vec{p}_0|| \gg \nu$ имеем следующее разложение для I :

$$I = \frac{\pi^2}{v} \frac{1}{\delta^2 (\rho_1^2 - \rho_0^2)} - \frac{i\pi^2}{\delta^4 \rho_0} \ln v^2 + \text{const.} \quad (17)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение при $v \rightarrow 0$ интеграла (13) в случае, когда $|\vec{\delta}| \ll v$. Сделаем в (13) замену $\vec{p} = \vec{q} - \vec{p}_0$ и разобьем область интегрирования на две области, выделив шаровую область $\Omega_{\vec{p}=0}$ радиуса $Cv^{2-\kappa}$ с центром в нуле, причем $\kappa \ll 1$; дополнение $\bar{\Omega}_{\vec{p}=0}$ до всего пространства обозначим через $\bar{\Omega}_{\vec{p}=0}$. Тогда имеем

$$I = \left\{ \int_{\Omega_{\vec{p}=0}} + \int_{\bar{\Omega}_{\vec{p}=0}} \right\} \frac{d\vec{p}}{[(\vec{p} + \vec{\delta})^2 + v^2]^2 \rho^2 [\rho^2 + 2(\vec{p}, \vec{p}_0) + \gamma^2 v^2 - i\varepsilon]} \equiv J_1 + J_2, \quad (18)$$

где через J_1 обозначен интеграл по $\Omega_{\vec{p}=0}$, J_2 — интеграл по $\bar{\Omega}_{\vec{p}=0}$. В J_1 сделаем замену $\vec{p} = v^2 \vec{q}$, при которой область $\Omega_{\vec{p}=0}$ перейдет в область $\Omega_{\vec{q}=0}$ радиуса $Cv^{-\kappa}$ с центром в нуле, причем в подынтегральном выражении опустим старшие по v^2 члены при этом для ведущего члена асимптотики получим выражение

$$J_1 \approx \frac{1}{2[\delta^2 + v^2]^2} \int_{\Omega_{\vec{q}=0}} \frac{d\vec{q}}{q^2 \left[(\vec{q}, \vec{p}_0) + \frac{1}{2} \gamma^2 - i\varepsilon \right]} \approx \frac{i\pi^2 \ln Cv^{-\kappa}}{\rho_0 [\delta^2 + v^2]^2}. \quad (19)$$

В интеграле J_2 в (18) положим $\vec{p} = v\vec{q}$. При этом область $\bar{\Omega}_{\vec{p}=0}$ перейдет в область $\bar{\Omega}_{\vec{q}=0}$ — дополнение шаровой области радиуса $Cv^{1-\kappa}$ с центром в нуле до всего пространства. Опустив старшие по v члены, получим

$$J_2 \approx \frac{1}{2v^4} \int_{\bar{\Omega}_{\vec{q}=0}} \frac{d\vec{q}}{[(\vec{q} + \vec{\delta})^2 + 1]^2 q^2 [(\vec{q}, \vec{p}_0) - i\varepsilon]}, \quad (20)$$

где $|\tilde{\delta}| = \frac{|\vec{\delta}|}{v} \approx 1$.

Проинтегрируем (20) по угловым переменным ξ и, воспользовавшись тождеством $\frac{1}{AB^2} = 2 \int_0^\infty \frac{dx}{(Ax + B)^3}$, обнаружим, что единственным интегралом, который расходится на нижнем пределе, является интеграл:

$$\frac{\tilde{\delta}^2 + 1}{\rho_0} \int_{Cv^{1-\kappa}}^\infty \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{[(\rho^2 + \tilde{\delta}^2 + 1)^2 - (2\rho\tilde{\delta} \sin \theta_{\vec{p}_0 \vec{\delta}})^2]^{1/2}} \ln \frac{2\rho\tilde{\delta} \cos \theta_{\vec{p}_0 \vec{\delta}} - D^{1/2}}{2\rho\tilde{\delta} \cos \theta_{\vec{p}_0 \vec{\delta}} + D^{1/2}}, \quad (21)$$

где $D = (\rho^2 + \tilde{\delta}^2 + 1)^2 - (2\rho\tilde{\delta} \sin \theta_{\vec{p}_0 \vec{\delta}})^2$.

Выделяя расходимость с помощью интегрирования по частям, находим

$$J_2 \approx - \frac{i\pi^2}{[\delta^2 + v^2]^2 \rho_0} \ln C v^{1-\kappa}. \quad (22)$$

Учитывая (19), для ведущей асимптотики I при $v \rightarrow 0$ и $\delta \approx v$ окончательно получим

$$I = - \frac{i\pi^2}{\rho_0 [\delta^2 + v^2]^2} [\ln v + \text{const}]. \quad (23)$$

§ 3. Члены первого порядка

Используя метод, изложенный в § 2, рассмотрим асимптотическое поведение при $v \rightarrow \infty$ членов 1-го порядка в (12):

$$T_{if}^{IB} = \langle \vec{k}_f n_f | V_1 + V_3 | \vec{k}_i n_i \rangle \equiv T_1 + T_3. \quad (24)$$

При этом получим также асимптотические выражения для некоторых интегралов, возникающих при исследовании асимптотик членов 2-го и 3-го порядков в (12). Кроме того, выражение для ведущих вкладов членов 1-го порядка потребуется для сравнения с ведущими вкладами членов 2-го и 3-го порядков, рассмотрение которых будет проведено в последующей статье.

Введем необходимые обозначения: $\vec{q}_i = \frac{M}{1+M} \vec{k}_f - \vec{k}_i$ — «передаваемый» импульс 1-й частицы, $\vec{q}_f = \frac{M}{M+1} \vec{k}_i - \vec{k}_f$ — «передаваемый» импульс 2-й частицы, $M = \frac{m_p}{m_e}$, причем в рассматриваемой задаче $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_f| = k_0$, так что $q_i^2 = q_f^2$; кроме того, обозначим $\tilde{q}_i = \frac{1}{k_0} \vec{q}_i$, $\tilde{q}_f = \frac{1}{k_0} \vec{q}_f$, $\eta = \frac{q_0}{k_0}$. В этих обозначениях имеем выражение для T_3 :

$$T_3 = \frac{N}{\pi^2 k_0^6} \eta \int \frac{d\vec{p}}{[(\vec{p} - \tilde{q}_f)^2 + \eta^2]^2 [(\vec{p} + \tilde{q}_i)^2 + \eta^2]^2 p^2}, \quad (25)$$

где $N = \frac{4}{\pi^2} q_0^4 v_0$.

При $\eta \rightarrow 0$ главный вклад в асимптотику T_3 дают области $\Omega \vec{p} = \tilde{q}_f$, $\Omega \vec{p} = -\tilde{q}_i$, причем, если $|\tilde{q}_i + \tilde{q}_f| \gg \eta$, вклад от каждой области можно учитывать по отдельности. Это приводит к асимптотике

$$T_3 \approx \frac{N}{\pi^2 k_0^6} \eta \frac{2}{\tilde{q}_i^2 (q_i + q_f)^4} \int_{\substack{\Omega \tilde{q}_f \\ \vec{p} = -\tilde{q}_i}} \frac{d\vec{p}}{[(\vec{p} + \tilde{q}_i)^2 + \eta^2]^2} \approx \frac{2N}{k_0^6 \tilde{q}_i^2 (q_i + q_f)^4}. \quad (26)$$

Если $|\tilde{q}_i - \tilde{q}_f| \approx \eta$, то обе области пересекаются, и при вычислении ведущих вкладов следует учитывать область, содержащую обе точки $\vec{p} = \tilde{q}_f$, $\vec{p} = -\tilde{q}_i$, но в этой области несингулярен потенциальный знаменатель. Сделав в (25) замену $\vec{q} = \vec{p} - \tilde{q}_f$ и для нахождения ведущей асимптотики расширяя общую область $\Omega_{\vec{q}=0}$ до всего пространства, получим

$$T_3 \approx \frac{N}{\pi^2 k_0^6} \eta \frac{1}{\tilde{q}_i^2} \int \frac{d\vec{q}}{[q^2 + \eta^2]^2 [(\vec{q} + \vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 + \eta^2]^2} \approx \frac{2N}{k_0^6 \tilde{q}_i^2 [(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 + 4\eta^2]^2}. \quad (27)$$

Рассмотрим далее

$$T_1 = \psi_f(\vec{q}_i) \int V_1(\vec{q} - \vec{q}_f) \psi_i(\vec{q}) d\vec{q} \equiv \psi_f(\vec{q}_i) \langle \vec{q}_f | V_1 | n_i \rangle, \quad (28)$$

где $\psi_f(\vec{q}) = \langle \vec{q} | n_f \rangle$, $\psi_i(\vec{q}) = \langle \vec{q} | n_i \rangle$.

Заметим, что $|n_i\rangle$ — собственная функция уравнения Шредингера для движения в поле V_1 с собственным значением $-E_0 = -\frac{q_0^2}{2\mu_{ep}}$, так что

$$T_1 = -\frac{1}{2\mu_{ep}} (q_f^2 + q_0^2) \psi_f(q_i) \psi_i(q_f); \quad (29)$$

при $\eta \rightarrow 0$

$$T_1 \approx -\frac{N}{q_i^6}. \quad (30)$$

Итак, асимптотика T_{if}^{IB} определяется следующим выражением:

$$T_{if}^{IB} \approx N \left[\frac{2}{q_i^2 (\vec{q}_i + \vec{q}_f)^4} - \frac{1}{q_i^6} \right], \quad (31)$$

если $(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 \gg q_0^2$;

$$T_{if}^{IB} \approx \frac{2N}{q_i^2 [(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 + 4q_0^2]^2}, \quad (32)$$

если $(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 \approx q_0^2$.

Отметим, что учет члена T_1 приводит к выражению для сечения $Q_{вк}$ (2), полученному в [1].

Асимптотическое поведение T_3 рассматривалось в [4]. Наши результаты отличаются от результатов, полученных в [4], тем, что в выражение для коэффициента N входит в действительности приведенная масса электрона, в то время как в указанной работе подставлялась полная масса электрона. Хотя это отличие само по себе является незначительным, однако при сопоставлении вкладов членов первого и второго порядков его необходимо принимать во внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brinkman H. C., Kramers H. A. Proc. Acad. Sci. Amsterdam., 33, 973, 1930.
2. Jackson J. D., Schiff H. Phys. Rev., 89, 359, 1953.
3. Drisko R. M. Thesis, Carnegie Institute of Technology, 1955.
4. Mapleton R. A. Proc. Phys. Soc., 83, 895, 1964.
5. Bransden B. H. «Advances in Atomic and Molecular Physics», 1, 85—149, Academic Press, N. Y.—L., 1965.
6. Mapleton R. A. Proc. Phys. Soc., 91, 868, 1967.
7. Mittleman M. H. Proc. Phys. Soc., 84, 453, 1964.
8. Гольдберг М., Ватсон К. Теория столкновений. «Мир», 1967.
9. Толмачев В. В. Теория бозе-газа, 1969 (в печати).

Поступила в редакцию
28.9 1968 г.

Кафедра
химической механики
мехмата