Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1969

УДК 539.1.01

Г. ГЕРЕ

РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНА ПО СПИРАЛИ

В данной работе исследуется движение электрона по спирали в постоянном и однородном поле, направленном по оси z. В первом параграфе результаты получены по классической теории, без учета квантовых поправок. Во втором параграфе результаты получены по квантовой теории, с учетом квантовых поправок к интенсивности и квантовых флуктуаций. Найдены функции зависимости полной энергии E, поперечной энергии $E_\perp$ и компонента z волнового вектора k_3 от времени.

§ 1. Классическое приближение

При вычислениях мы исходим из известных формул для полной интенсивности спонтанного излучения электрона, движущегося по спирали [1]:

$$W^{\text{кл}} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2 c \beta_0^4}{R^2}\left(\frac{E_\perp}{mc^2}\right)^4, \tag{1}$$

где

$$E_\perp = E\sqrt{1-\beta_3^2},\quad R = \frac{E_\perp \beta_0}{eH},\quad \beta_3 = \frac{c\hbar k_3}{E},$$

$$\beta_0^2 = \frac{\beta^2 - \beta_3^2}{1-\beta_3^2}$$

и для вероятности перехода

$$\frac{dw_{nk_3}^{n'k_3'}}{d\varkappa'\,d\Omega'} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\,\varkappa'\delta\left(\varkappa' - \frac{\beta_0 \nu}{R}\right)\sqrt{1-\beta_3^2}\,\delta_{k_3', k_3 - \varkappa\cos\theta}\Phi, \tag{2}$$

где $\Phi = \beta_0^2 J_\nu'^2(\nu\beta_0 \sin\theta') + \operatorname{ctg}^2\theta' J_\nu^2(\nu\beta_0\sin\theta')$.

В выражении (2) $\varkappa'$ и θ' — лоренц-преобразованные величины, которые получаются, если мы из лабораторной системы переходим в систему, движущуюся вместе с электроном по оси z. Соответствующие формулы перехода даются выражениями

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\beta_3^2}\sin\theta'}{1+\beta_3\cos\theta'},$$

$$\varkappa = \frac{1+\beta_3\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta_3^2}}\varkappa'.$$

Общая формула для измерения физической величины во времени дается следующим выражением:

$$\frac{df}{dt} = \int\sum_{n'k_3'} dw_{nk_3}^{n'k_3'}\Delta f, \tag{3}$$

где $dw_{nk_3}^{n'k_3'}$ определяется формулой (2), а $\Delta f = f' - f$. Здесь f' характеризует величину в конечном состоянии, а f — в начальном. В дальнейшем рассмотрим отдельно релятивистский и ультрарелятивистский случаи.

Рассмотрим сначала изменение полной энергии E во времени для релятивистского случая. С учетом $K' - K = -\frac{\nu\beta_0}{R}\frac{1+\beta_3\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta_3^2}}$ согласно (3) запишем $\frac{dE}{dt} = -W^{\text{кл}}$, где $W^{\text{кл}}$ определяется по формуле (1). Учитывая, что $K'_\perp - K_\perp = (K' - K)\sqrt{1-\beta_3^2}$, получим для изменения поперечной энергии $E_\perp$ во времени:

$$\frac{dE_\perp}{dt} = -\frac{E_\perp}{E}W^{\text{кл}} = \sqrt{1-\beta_3^2}\,\frac{dE}{dt}.$$

А для изменения k_3 с учетом $k_3' - k_3 = -\varkappa'\frac{\cos\theta'+\beta_3}{\sqrt{1-\beta_3^2}}$ получим

$$\frac{dk_3}{dt} = -\frac{k_3}{E}W^{\text{кл}}.$$

Из определения β_3 следует, что k_3 и E связаны соотношением

$$k_3 = \frac{\beta_3}{c\hbar}E. \tag{4}$$

Дифференциальные уравнения для E, $E_\perp$ и k_3 отличаются друг от друга только постоянными множителями. Следовательно, в дальнейшем будем выписывать только результаты для полной энергии E. Приведем дифференциальное уравнение для полной энергии с учетом (4) к более удобному для решения виду:

$$\frac{dE}{dt} = -A\left(E^2 - \frac{m^2c^4}{1-\beta_3^2}\right), \tag{5}$$

где

$$A = \frac{2}{3}\frac{e^4H^2}{m^4c^7}(1-\beta_3^2).$$

Это дифференциальное уравнение с учетом начального условия $E(0)=$ $=E_0$ запишем так:

$$E(t)=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_3^2}}\,\mathrm{cth}\left(\frac{A\cdot mc^2}{\sqrt{1-\beta_3^2}}\,t+\mathrm{Arcth}\,\frac{E_0}{mc^2}\sqrt{1-\beta_3^2}\right). \tag{6}$$

Решение его при $\beta_3=0$ совпадает с полученным в [2]. В ультрарелятивистском случае выражение (5) переходит в

$$\frac{dE}{dt}=-AE^2. \tag{7}$$

Решение этого дифференциального уравнения примет вид

$$E_{(t)}=\frac{E_0}{E_0At+1}. \tag{8}$$

Выражение (8) можно получить из (6), если в последнем считать, что $E\gg mc^2$, и разлагать в ряд до линейных членов по mc^2 включительно.

§ 2. Квантовая теория

Будем рассматривать ультрарелятивистский и ультраквантовый случаи. Для каждого из них проанализируем влияние квантовых поправок к интенсивности и квантовых флуктуаций на изменение полученных в § 1 классических результатов.

Вместо (5) запишем

$$\frac{dE}{dt}=-A(E^2-BE^3-CE), \tag{9}$$

где

$$B=B_1+B_2=\frac{55\sqrt{3}}{16}\,\frac{\hbar eH}{m^3c^5}\sqrt{1-\beta_3^2}\left(1+\frac{1}{6}\right),$$

$$C=\frac{13}{32\sqrt{3}}\cdot\frac{e\hbar H}{mc}\cdot\frac{\beta_3^2}{\sqrt{1-\beta_3^2}}.$$

В выражении (9) член BE^3 соответствует учету квантовых поправок к интенсивности, а член CE — учету квантовых флуктуаций. C можно найти, как это было сделано в [3]. Если в выражении (9) пренебречь квантовыми флуктуациями, т. е. положить $C=0$, $B_2=0$ и $\beta_3=0$, то получим результат, аналогичный [4].

Решением дифференциального уравнения (9) в первом приближении по постоянной Планка $\hbar$ является

$$E(t)=E^p[1+BE^k+C(3B^2E^k+E^pE^\Phi)], \tag{10}$$

где E^p определяется выражением (8), а

$$E^k=E^p\ln\left(1+\frac{E_0At}{1-BE_0}\right),$$

$$E^\Phi=\frac{3BE'-6B^2E'^2+1}{2E'^2(1-BE')}-\frac{2BE_0-6B^2E_0^2+1}{2E_0^2(1-BE_0)},$$

$$E'=E^p(1+BE^k).$$

Рассмотрим ультраквантовый случай, когда выполняется условие

$E \gg B^{-1}$. Тогда получаем следующее дифференциальное уравнение для полной энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -aE^{2/3}, \tag{11}$$

где

$$a = \frac{32}{27}\frac{\Gamma(^2/_3)}{3^{4/3}}\left(\frac{e^8H^2}{\hbar^4 c}\right)^{1/3}\cdot(1-\beta_3^2)^{1/3}.$$

При $\beta_3=0$ (11) совпадает с выражением, полученным в [5].

Решением (11) является

$$Et = \left[E_0^{1/3} - \frac{at}{3}\right]^3. \tag{12}$$

Если учесть квантовые флуктуации и провести аналогичные как и в [3] вычисления, то получим

$$\frac{dE}{dt} = -AE^{2/3} + BE^{-2/3}, \tag{13}$$

где

$$A = 0{,}693a,$$

$$B = \frac{17}{2\cdot 3^{17/3}}\frac{\Gamma(^1/_3)}{\beta_3^2(1-\beta_3^2)^{1/3}}\left(\frac{e^{10}H^4c}{\hbar^2}\right)^{1/3}.$$

Решение (13) найдем в виде

$$E(t) = E^{\text{укв}}\left[1 + \frac{3B}{A}\left((E^{\text{укв}})^{-4/3} - E_0^{-1/3}(E^{\text{укв}})^{-1}\right)\right], \tag{14}$$

где

$$E^{\text{укв}} = \left[E_0^{1/3} - \frac{At}{3}\right]^3.$$

Для иллюстрации приведем некоторые оценки коэффициентов A, B, C, a, входящих в полученные результаты. Все эти коэффициенты содержат напряженность магнитного поля в какой-то степени. Интересно исследовать, как влияет изменение напряженности магнитного поля на результаты, полученные выше. Сегодняшние предельные значения: $E \sim 10$ *Бэв*, $H \sim 10^4$ *гс*. Влияние сверхсильных полей на магнитнотормозное излучение подробно рассмотрено в [6]. Мы приведем только один численный пример для ультрарелятивистского случая. Пусть $\beta_3=0{,}5$; $E=1$ *Бэв*, $H=10^4$ *гс*. Тогда энергия частицы уменьшается после 1 *сек* примерно до 1 *Мэв*, а если $H=10^6$ *гс*, то та же энергия достигается уже через 10^{-4} *сек*, причем достигается тем быстрее, чем меньше β_3.

Исследуем порядок квантовых поправок. В ультрарелятивистском случае имеем $H=10^4$ *гс*, квантовые поправки к интенсивности становятся для $E \sim 10^{14}$ *эв* одного порядка с основным членом. При дальнейшем повышении энергии формула (10) (при $C=0$, $B_2=0$) уже непригодна, а нужно применять формулу для ультраквантового случая (12). Итак, в ультраквантовой области квантовые флуктуации весьма существенны, они одного порядка с основным членом и уменьшают интенсивность излучения примерно на 30%.

В заключение выражаю благодарность проф. А. А. Соколову и асс. В. Ч. Жуковскому за обсуждение вопросов, изложенных в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sokolov A. A., Ternov I. M. Zeit. f. Phys., 211, 1, 1968.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1967, стр. 262.
3. Sokolov A. A., Ternov I. M., Loskutov J. M. Phys. Rev., 125, 2, 731, 1962.
4. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., 1958, стр. 172.
5. Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. М., 1966, стр. 121.
6. Erber T. Rev. Mod. Phys., 38, 4, 626, 1966.

Поступила в редакцию
9.9 1968 г.

Кафедра
теоретической физики