

УДК 521,42; 521,43

В. Н. КИРЮШЕНКОВ

ВЛИЯНИЕ ГАЛИЛЕЕВЫХ СПУТНИКОВ НА ДВИЖЕНИЕ ПЯТОГО СПУТНИКА ЮПИТЕРА

Исследуется возмущающее воздействие галилеевых спутников на движение V спутника Юпитера.

В качестве промежуточной орбиты V спутника принята орбита задачи двух неподвижных центров. Такая промежуточная орбита включает возмущения, обусловленные второй, третьей и частично четвертой зональными гармониками разложения силовой функции притяжения Юпитера, в ряд по полиномам Лежандра. Результаты исследования показывают, что возмущения у рассматриваемого спутника от галилеевых спутников очень незначительны, поэтому учитывать следует лишь вековые возмущения.

В статье определяются возмущения в движении V спутника Юпитера от галилеевых спутников.

Промежуточную (невозмущенную) орбиту V спутника выберем на основе решения задачи двух неподвижных центров [1]. Эта орбита обладает тем преимуществом по сравнению с кеплеровским эллипсом, что она уже содержит наиболее существенные возмущения, а именно возмущения от второй, третьей и частично четвертой зональных гармоник разложения силовой функции притяжения Юпитера в ряд по полиномам Лежандра.

§ 1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения движения V спутника запишем в следующем виде [2]:

$$\frac{da}{dt} = (fma)^{-1/2} 2a(1 + 3\varepsilon^2) \frac{\partial R}{\partial \lambda},$$
$$\frac{d\lambda}{dt} - n_1 = (fma)^{-1/2} \left[-2a(1 + 3\varepsilon^2) \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1}{2} q \frac{\partial R}{\partial q} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} k \frac{\partial R}{\partial k} + \frac{1}{2} u \frac{\partial R}{\partial u} + \frac{1}{2} v \frac{\partial R}{\partial v} \Big], \\
\frac{dq}{dt} + n_2 k &= (fma)^{-1/2} \left[-\frac{1}{2} q \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \left(1 + \frac{5}{2} \varepsilon^2\right) \frac{\partial R}{\partial k} \right], \\
\frac{dk}{dt} - n_2 q &= (fma)^{-1/2} \left[-\frac{1}{2} k \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \left(1 + \frac{5}{2} \varepsilon^2\right) \frac{\partial R}{\partial q} \right], \\
\frac{du}{dt} + n_3 v &= (fma)^{-1/2} \left[-\frac{1}{2} u \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2\right) \frac{\partial R}{\partial v} \right], \\
\frac{dv}{dt} - n_3 u &= (fma)^{-1/2} \left[-\frac{1}{2} v \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2\right) \frac{\partial R}{\partial u} \right],
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$a, \lambda, q, k, u, v \tag{2}$$

являются элементами движения V спутника,

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{(fm)^{1/2}}{a^{3/2}} \left[1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \sigma^2 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 (q^2 + k^2 - u^2 - v^2) \right], \\
n_2 &= \frac{(fm)^{1/2}}{a^{3/2}} \left[\frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{9}{8} \varepsilon^4 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \sigma^2 - 3\varepsilon^2 (u^2 + v^2) \right], \\
n_3 &= \frac{(fm)^{1/2}}{a^{3/2}} \left[-\frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{9}{8} \varepsilon^4 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \sigma^2 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 (u^2 + v^2) \right],
\end{aligned} \tag{3}$$

f — постоянная тяготения, m — масса Юпитера, ε и σ — некоторые малые величины [3]. В коэффициентах при производных от возмущающей функции R отброшены члены второго и более высокого порядка относительно малых величин q, k, u, v и ε^2 .

При промежуточном движении, когда возмущающая функция равна нулю, элементы (2) связаны со временем следующим образом:

$$\begin{aligned}
a &= a_0, \quad \lambda = n_1(t - t_0) + \lambda_0, \\
q &= e \cos [n_2(t - t_0) + \pi_0], \quad k = e \sin [n_2(t - t_0) + \pi_0], \\
u &= s \cos [n_3(t - t_0) + h_0], \quad v = s \sin [n_3(t - t_0) + h_0],
\end{aligned} \tag{4}$$

где $a_0, \lambda_0, e, s, \pi_0$ и h_0 — некоторые постоянные, а n_1, n_2 и n_3 определяются формулами (3).

§ 2. Возмущающая функция

Возмущающая функция задачи о влиянии галилеевых спутников на движение V спутника равна

$$R = \sum_{i=1}^{IV} R_i, \tag{5}$$

причем

$$R_i = fm_i \left(\frac{1}{\Delta_i} - \frac{xx_i + yy_i + zz_i}{r_i^3} \right), \tag{6}$$

где

$$\Delta_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2,$$

x, y, z — ивицентрические экваториальные прямоугольные координаты V спутника, m_i, x_i, y_i, z_i и r_i — соответственно масса, координаты и радиус-вектор i -того галилеева спутника.

Движение галилеевых спутников будем определять формулами

$$\begin{aligned}\lambda_i' &= \lambda_i + \xi_i, \\ r_i &= a_i(1 + \eta_i), \\ z_i &= r_i s_i \sin(\lambda_i' - \Omega_i),\end{aligned}\quad (7)$$

где λ_i' — долгота i -того спутника, λ_i — средняя долгота, Ω_i — долгота восходящего узла, a_i, s_i — некоторые постоянные, ξ_i, η_i — периодические неравенства, причем все числовые значения нужных нам величин будем брать согласно [4]. Пренебрегая членами второго и более высокого порядка относительно малых величин s_i, ξ_i и η_i , с помощью (7) запишем

$$\begin{aligned}x_i &= a_i(\cos \lambda_i + \eta_i \cos \lambda_i - \xi_i \sin \lambda_i), \\ y_i &= a_i(\sin \lambda_i + \eta_i \sin \lambda_i + \xi_i \cos \lambda_i), \\ z_i &= a_i s_i \sin(\lambda_i - \Omega_i).\end{aligned}\quad (8)$$

В [2] показано, что координаты V спутника x, y и z можно представить следующими формулами:

$$a \sum_j (A_j \sin_j \lambda + B_j \cos j\lambda), \quad (9)$$

где A_j и B_j — степенные ряды по малым величинам q, k, u, v и ε^2 .

Используя формулы (8) и формулы типа (9), выразим возмущающую функцию через элементы движения V спутника (2) и параметры, определяющие движение галилеевых спутников:

$$\begin{aligned}R_i &= \frac{fm_i}{a_i} \left\{ \frac{a_i}{\Delta_{i0}} + \left(\frac{a_i}{\Delta_{i0}} \right)^3 \sum_{j,j'} [C_{j,j'} \sin(j\lambda + j'\lambda_i) + D_{j,j'} \cos(j\lambda + j'\lambda_i)] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_i}{\Delta_{i0}} \right)^5 \sum_{j,j'} [E_{j,j'} \sin(j\lambda + j'\lambda_i) + F_{j,j'} \cos(j\lambda + j'\lambda_i)] + \dots \right\},\end{aligned}$$

где коэффициенты $C_{j,j'}, D_{j,j'}, E_{j,j'}$ и $F_{j,j'}$ являются степенными рядами относительно малых величин

$$q, k, u, v, s_i, \xi_i, \eta_i \text{ и } \varepsilon^2. \quad (10)$$

Если $\alpha_i = \frac{a}{a_i}$ и $b_n^{(j)}$ — коэффициенты Лапласа, то

$$\left(\frac{a_i}{\Delta_{i0}} \right)^n = (1 - 2\alpha_i \cos(\lambda - \lambda_i) + \alpha_i^2)^{-n/2} = \frac{1}{2} b_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_n^{(j)} \cos j(\lambda - \lambda_i). \quad (11)$$

§ 3. Возмущения элементов движения Пятого спутника

Производные от силовой функции по элементам (2)

$$\frac{a}{(fma)^{1/2}} \frac{\partial R_i}{\partial a}, \quad \frac{1}{(fma)^{1/2}} \frac{\partial R_i}{\partial \lambda}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(fma)^{1/2}} \frac{\partial R_i}{\partial v}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_i \frac{m_i}{m} \frac{(fm)^{1/2}}{a^{3/2}} \sum_{j,j'} \left\{ A'_{j,j'} \sin(j\lambda + j'\lambda_i) + B_{j,j'} \cos(j\lambda + j'\lambda_i) + \right. \\ \left. + \left(\frac{a_i}{\Delta_{i0}} \right)^3 [C'_{j,j'} \sin(j\lambda + j'\lambda_i) + D'_{j,j'} \cos(j\lambda + j'\lambda_i)] + \right. \\ \left. + \left(\frac{a_i}{\Delta_{i0}} \right)^5 [E'_{j,j'} \sin(j\lambda + j'\lambda_i) + F'_{j,j'} \cos(j\lambda + j'\lambda_i)] \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

где коэффициенты $A'_{j,j'}$, $B_{j,j'}$, ..., $F'_{j,j'}$ зависят от q , k , u , v , α_i , ξ_i , η_i , s_i и ε^2 .

В формулах типа (12) отбрасываются все члены второго и более высокого порядка относительно малых величин (10).

Все члены в выражениях для производных от возмущающей функции были разбиты на две группы. Первую группу составили короткопериодические члены, амплитуды которых имеют величину порядка малых величин (10). Во вторую группу вошли остальные короткопериодические члены со сравнительно большими амплитудами, все долгопериодические и вековые члены.

При оценке влияния членов первой группы на движение V спутника выражение (11) заменим максимальным значением, которое равно $(1-\alpha_i)^{-n}$, и будем считать, что элементы (2), входящие в рассматриваемые члены, связаны со временем формулами промежуточного движения (4). После интегрирования по времени найдем, что члены первой группы дают периодические колебания элементов V спутника с амплитудами меньшими, чем 10^{-6} или $0''{,}2$. Для наблюдателя на Земле эти возмущения соответствуют еще меньшей величине $0''{,}00007$, которая во много раз меньше точности современных наблюдений. Это дает нам право не учитывать члены первой группы.

Далее, используя формулу (11), выделим из выражений типа (12) все члены второй группы. Все нужные нам коэффициенты Лапласа представим в виде рядов по степеням α_i . Выразив элементы (2) в правых частях дифференциальных уравнений (1) через время с помощью формул (4), можно без всяких затруднений проинтегрировать эту систему уравнений. Таким образом, мы найдем решение дифференциальных уравнений (1) в первом приближении относительно возмущающих масс.

Ниже приводятся элементы движения V спутника с учетом вековых и самых больших периодических возмущений от галилеевых спутников:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a_0} &= 1 + \sum_{i=1}^{IV} \alpha_i^3 \frac{m_i}{m} \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_1 - n_1^{(i)}} G(\alpha_i) \cos(2\lambda - 2\lambda_i), \\ \lambda &= \lambda_0 + \bar{n}_1(t - t_0) - \sum_{i=1}^{IV} \alpha_i^3 \frac{m_i}{m} \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_1 - n_1^{(i)}} B(\alpha_i) \sin(2\lambda - 2\lambda_i), \\ q &= e \cos[\bar{n}_2(t - t_0) + \pi_0] - \sum_{i=1}^{IV} \alpha_i^3 \frac{m_i}{m} \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2 + \bar{n}_1 - 2n_1^{(i)}} Q(\alpha_i) \cos(\lambda - 2\lambda_i), \\ k &= e \sin[\bar{n}_2(t - t_0) + \pi_0] + \sum_{i=1}^{IV} \alpha_i^3 \frac{m_i}{m} \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_2 + \bar{n}_1 - 2n_1^{(i)}} Q(\alpha_i) \sin(\lambda - 2\lambda_i), \end{aligned}$$

$$u = s \cos [\bar{n}_3(t - t_0) + h_0] - \sum_{i=I}^{IV} \alpha_i^3 \frac{m_i}{m} \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_3 - n_3^{(i)}} D(\alpha_i) s_i \cos \Omega_i,$$

$$v = s \sin [\bar{n}_3(t - t_0) + h_0] - \sum_{i=I}^{IV} \alpha_i^3 \frac{m_i}{m} \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_3 - n_3^{(i)}} D(\alpha_i) s_i \sin \Omega_i,$$

где

$$\bar{n}_1 = n_1 \left(1 - \sum_{i=I}^{IV} N_i \right),$$

$$\bar{n}_2 = n_2 + n_1 \sum_{i=I}^{IV} \alpha_i^3 \frac{m_i}{m} D(\alpha_i),$$

$$\bar{n}_3 = n_3 - n_1 \sum_{i=I}^{IV} \alpha_i^3 \frac{m_i}{m} D(\alpha_i),$$

$G(\alpha_i)$, $B(\alpha_i)$, $Q(\alpha_i)$, $D(\alpha_i)$ и N_i представляют собой степенные ряды относительно α_i ; n_1 , n_2 и n_3 определяются формулами (3); a_0 , λ_0 , e , s , π_0 и h_0 — некоторые постоянные, которые нужно определить при сравнении теории движения V спутника с его наблюдениями.

	I	II	III	IV
T [сут]	1,77	3,55	7,16	16,69
α_i	0,43	0,27	0,17	0,097
s_i	0,0006	0,0082	0,0031	0,0043
$\frac{m_i}{m} 10^4$	0,38	0,25	0,82	0,51
$A_a 10^6$	8	1	0,8	0,08
$A_\lambda 10^6$	18	2	1	0,2
$A_q, k 10^6$	19	2	1	0,1
$A_u, v 10^6$	0,7	1	0,3	0,05
$N_i 10^6$	4	0,6	0,4	0,05

В приводимой таблице представлены значения некоторых параметров галилеевых спутников [4] и величины возмущений элементов движения V спутника, аналитические выражения которых были выписаны.

В дополнение к таблице напомним, что для V спутника период обращения равен 0,498 суток и $\varepsilon^2 = 0,00223$.

Верхняя строка таблицы содержит номера галилеевых спутников. Следующие строки содержат: T — период обращения в сутках, $\alpha_i = \frac{a}{a_i}$ — отношение средних расстояний от центра Юпитера соответственно V спутника и i -того галилеевого спутника, s_i — синус наклона плоскости орбиты к плоскости экватора, $\frac{m_i}{m}$ — отношение массы галилеева спутника к массе Юпитера, $A_a, A_\lambda, A_{g,h}$ и $A_{u,v}$ — амплитуды указанных выше периодических возмущений у элементов движения V спутника (индекс указывает, к какому элементу относится амплитуда возмущения) и N_i — величины, которые определяют вековые возмущения у элемента λ .

Из таблицы видно, что амплитуды самых больших периодических возмущений имеют величину порядка 2×10^{-5} или $4''$. Для наблюдателя, находящегося на Земле, эти возмущения соответствуют углу $0'',0014$. Имеющиеся наблюдения V спутника обладают несравненно меньшей точностью. Следовательно, при сравнении теории движения V спутника с наблюдениями периодические возмущения от галилеевых спутников не следует учитывать.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Б. М. Щиголеву за обсуждение результатов и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 6, 1967.
2. Кириушев В. Н. «Сообщения ГАИШ», № 165, 1969.
3. Аксенов Е. П. «Сообщения ГАИШ», № 137, 1965.
4. De Sitter W. Monthly Notices of the R. Astr. Soc., 91, 706—738, 1969.

Поступила в редакцию
16.9 1968 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии