Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1969

УДК 517.9

А. В. КНЯЗЕВ, М. М. ХАПАЕВ

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

В статье метод усреднения Боголюбова, развитый в основополагающих работах [1, 2] для дифференциальных уравнений, расширен на некоторые классы нелинейных интегральных уравнений. Принцип усреднения заменен более общим принципом частичного усреднения. Доказана теорема, обосновывающая усреднение на конечном интервале. Рассмотрен пример задачи, относящейся к теории автоматической регулировки усиления, в которой используется развитая теория.

Введение

В настоящей статье излагается принцип усреднения для систем интегральных уравнений вида

$$x(t) = \varepsilon \int_0^t K[\varepsilon(t-s)] f(s, x(s))\, ds, \tag{1}$$

где x, K, f — точки n-мерного евклидова пространства, ε — малый положительный параметр,

$$x(t) = \varepsilon \int_0^t K(t, s, x(s))\, ds, \tag{2}$$

где x, K — точки n-мерного евклидова пространства, ε — малый параметр.

Усреднение в системах вида (1) тесно связано с усреднением в системах в стандартной форме Н. Н. Боголюбова, развитым в основополагающих работах [1, 2].

Задача Коши для системы в стандартной форме сводится к системе интегральных уравнений, являющейся частным случаем системы (1) (с ядром $\varepsilon \exp[-\varepsilon t]$). Допустим, что функция $f(t, x)$ представлена в виде

$$f(t, x) = f_0(t, x) + f_1(t, x) \tag{3}$$

и пусть равномерно по $x \in D \subseteq E_n$ и $t > 0$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t, x)\, dt = 0. \tag{4}$$

Тогда системе (1) можно поставить в соответствие частично усредненную систему:

$$\xi(t) = \varepsilon \int\limits_0^t K[\varepsilon(t-s)] f_0(s, \xi(s))\, ds. \tag{5}$$

В частично усредненной системе функция $f_0(s, \xi)$ имеет явную зависимость от s. Такое обобщение принципа усреднения вызвано прикладными задачами. В теории колебаний, в теории регулирования и радиотехнике часто встречаются системы, подчиняющиеся уравнениям вида (1), в которых функции $f(t, x)$ наряду с быстрыми колебаниями по t содержат медленные движения. В инженерной постановке задачи решение уравнения должно существенным образом реагировать на эти медленные движения. Усреднение в обычном смысле, когда $f_0(t, x) = f_0(x)$, в таких задачах неприменимо.

Частичному усреднению можно придать смысл усреднения на конечном интервале времени, понятие о котором введено в работе [4].

Уравнения вида (2) рассматривались в теории усреднения А. Н. Филатовым [3]. Уравнение (2) дифференцированием по t сводилось к интегро-дифференциальному, а затем проводилось усреднение. Доказана теорема, устанавливающая близость решений усредненного и исходного уравнений, совпадающих при $t=0$, на конечном интервале времени $L\varepsilon^{-k}$ $\left(0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

Однако при весьма общих условиях усреднение можно проводить непосредственно в уравнениях вида (2). При этом близость решений исходного и усредненного уравнений имеет место на существенно большем интервале времени — порядка $L\varepsilon^{-1}$.

В настоящей статье теорема о близости решений исходного и усредненного уравнений доказывается с помощью непосредственного их сравнения методом, предложенным в работе [5].

Усреднение в системах вида (1)

Функция $y(t)$, записанная в виде

$$y(t) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} K[\varepsilon(t-s)] f(s)\, ds, \tag{6}$$

называется истокообразнопредставимой через ядро уравнения.

Лемма 1. Пусть функция $f(t)$ $[t \in (-\infty, \infty)]$ измерима и ограничена, а функция $K(t) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда для любого $\delta > 0$ можно указать такое $h(\delta)$, что при $|u_1 - u_2| < h(\delta)$ равномерно по $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\left| y\left(\frac{u_1}{\varepsilon}\right) - y\left(\frac{u_2}{\varepsilon}\right) \right| < \delta$, в котором $y(t)$ определяется формулой (6).

Доказательство. В силу ограниченности $f(t)$ существует число N, такое, что

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \varepsilon N \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K[\varepsilon(t_1 - s)] - K[\varepsilon(t_2 - s)]|\, ds,$$

введем замену $\varepsilon t_1 = u_1$, $\varepsilon t_2 = u_2$, $\varepsilon s = v$, тогда получим

$$\left| y\left(\frac{u_1}{\varepsilon}\right) - y\left(\frac{u_2}{\varepsilon}\right) \right| \leqslant N \int_{-\infty}^{\infty} | K(u_1 - v) - K(u_2 - v | dv.$$

Отсюда, в силу того, что $K(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, по свойству интеграла Лебега [6], следует утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть функция $K(t)$ и $f_1(t, x)$ определены для $t \in (-\infty, \infty)$ и $x \in D \subset E_n$ и пусть выполняются следующие условия:

а) $f_1(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори;

б) существует такая постоянная N, что в области определения $|f_1(t, x)| < N$;

в) существует суммируемая функция $H(t)$ и постоянная H_0, а также неубывающая функция $\psi(\alpha)$ $(\alpha > 0)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \psi(\alpha) = 0$, такая, что для $t \in (-\infty, \infty)$ и $x \in D$

$$|f_1(t, x') - f_1(t, x'')| < \psi(|x' - x''|) H(t)$$

и на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$ $\int\limits_{t_1}^{t_2} H(t)\, dt \leqslant H_0 (t_2 - t_1)$;

г) равномерно по $x \in D$ и $t_0 \in$ (а, в) (а и в могут быть и бесконечными) существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t, x)\, dt = 0;$$

д) $K(t)$ интегрируемая функция на $(-\infty, \infty)$.

Тогда, при всякой функции $y(t)$, определенной формулой (6) и принимающей значения в области D, для любого $\delta > 0$ можно указать такое ε_0, что при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполняется

$$\left| \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K[\varepsilon(t - s)] f(s, y(s))\, ds \right| < \delta$$

равномерно по $t \in$ (а, в).

Доказательство. Произведем замену $\varepsilon(t - s) = u$, при этом можем записать

$$I(t) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K[\varepsilon(t - s)] f_1(s, y(s))\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) f_1\left(t - \frac{u}{\varepsilon}, y\left(t - \frac{u}{\varepsilon}\right)\right) du. \quad (7)$$

Поскольку функция $K(t)$ интегрируема на $(-\infty, \infty)$, то по свойству интеграла Лебега [6] для любого $\delta > 0$ можно произвести такое разбиение интервала $(-\infty, \infty)$ на конечное число интервалов и построить такую функцию $\overline{K}(t)$, принимающую постоянные значения на каждом из отрезков разбиения, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t) - \overline{K}(t)|\, dt < \frac{\sigma}{3N}. \quad (8)$$

Причем существуют такие постоянные T_1 и T_2, что $\overline{K}(t) \equiv 0$ при $t < T_1$

и при $t>T_2$. В силу этого утверждения можно записать $|I(t)|\leqslant I_1(t)+$ $+I_2(t)$,

где
$$I_1(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K(u)-\overline{K}(u)|\left|f_1\left[t-\frac{u}{\varepsilon},\ y\left(t-\frac{u}{\varepsilon}\right)\right]\right|du,$$
$$I_2(t)=\left|\int\limits_{+T_1}^{T_2}\overline{K}(u)f_1\left[t-\frac{u}{\varepsilon},\ y\left(t-\frac{u}{\varepsilon}\right)\right]du\right|.$$

Из (8) и условия б) получим $I_1(t)<\frac{\delta}{3}$. Интервал $[T_1,\ T_2]$ разобьем на n конечных отрезков таким образом, чтобы все точки разрыва функции $K(t)$ совпали с точками разбиения. При этом некоторые точки разбиения могут и не совпадать с точками разрыва. Длина каждого отрезка разбиения A_i $(i=1,\ 2,\ 3,\dots,n)$ лежит в пределах
$$\frac{\alpha}{n}\leqslant \operatorname{mes}A_i\leqslant\frac{\beta}{n}\qquad(\alpha,\ \beta=\mathrm{const}>0).$$

Можем записать
$$I_2(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}|K_i|\int\limits_{A_i}f_1\left[t-\frac{u}{\varepsilon},\ y\left(t-\frac{u}{\varepsilon}\right)\right]du,$$

где K_i — значение $\overline{K}(t)$ на A_i.

Обозначим $y_i=y\left(t-\frac{u_i}{\varepsilon}\right)$, где u_i — начало отрезка A_i и $K_0=$ $=\max|K_i|$, тогда получим $I_2(t)\leqslant S_1(t)+S_2(t)$,

где
$$S_1(t)=K_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{A_i}\left|f_1\left[t-\frac{u}{\varepsilon},\ y\left(t-\frac{u}{\varepsilon}\right)\right]-f_1\left(t-\frac{u}{\varepsilon},\ y_i\right)\right|du,$$
$$S_2(t)=K_0\sum_{i=1}^{n}\left|\int\limits_{A_i}f_1\left(t-\frac{u}{\varepsilon},\ y_i\right)du\right|,$$

Оценим $S_1(t)$. В силу в) запишем
$$S_1(t)\leqslant K_0H_0\beta\psi\left(\max_i\max_{u\in A_i}\left|y\left(t-\frac{u}{\varepsilon}\right)-y_i\right|\right).$$

В силу леммы 1, при $n\to\infty$
$$\max_i\max_{u\in A_i}\left|y\left(t-\frac{u}{\varepsilon}\right)-y_i\right|\to 0$$

и равномерно по ε. Следовательно, можно указать такое n_0, что при $n>n_0$ $S_1(t)<\frac{\delta}{3}$ равномерно по ε. Зафиксируем n и оценим вторую сумму $S_2(t)$. В силу условия г) можно построить такую монотонно-убывающую функцию $\varphi(t)$, стремящуюся к нулю при $t\to\infty$, что во всей области D равномерно по $t_0\in(a,\ b)$:
$$\left|\int\limits_{t_0}^{t_0+t}f_1(t,\ y)\,dt\right|<|t|\,\varphi(t).$$

Откуда

$$S_2(t) \leqslant K_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta}{n} \varphi\left(\frac{\alpha}{\varepsilon n}\right) = K_0 \beta \varphi\left(\frac{\alpha}{\varepsilon n}\right).$$

При фиксированном n $S_2(t) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, так что для любого $\delta > 0$ можно указать такое ε_0, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ будет выполняться неравенство $S_2(t) < \frac{\delta}{3}$ равномерно по $t \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$. Из оценок для I_1, I_2, S_1, S_2 следует утверждение леммы.

Эта лемма является обобщением одной известной теоремы Н. Винера [7], которая имеет место при $y(t) = \mathrm{const}$ и непрерывно дифференцируемой функции $K(t)$.

Замечание 1. Если в лемме 2 интервал (a, b) конечный, то условие г) эквивалентно требованию, чтобы в D существовал предел

$$\lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t, x)\, dt = 0.$$

Замечание 2. Утверждение леммы 1 имеет место и в том случае, если ядро не содержит явно малого параметра ε, но удовлетворяет условию $|K'(t)| < \varepsilon K_1$, где $K_1 = \mathrm{const} < +\infty$.

Теорема 1. Пусть функции, входящие в уравнение (1), определены для $t > 0$ и x, принадлежащих области $D \subset E_n$, и пусть выполняются условия: а) существует непрерывное решение уравнения (1), принимающее значения в области D; б) выполняются условия леммы 2; в) функция $f_0(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f_0(t, x') - f_0(t, x'')| \leqslant \lambda |x' - x''|,$$

$$\forall x',\ x'' \in D \text{ и } t > 0;$$

г) функция $K(t)$ ограничена: $|K(t)| < K_0$.

Тогда любому сколь угодно малому $\eta > 0$ и сколь угодно большому L должно соответствовать такое ε_0, при котором $\xi = \xi(t)$ есть решение усредненного уравнения (7), определенное в интервале $0 < t < \infty$ и лежащее в области D вместе с η-окрестностью. Для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < L/\varepsilon$ справедливо неравенство $|x(t) - \xi(t)| < \eta$, в котором $x(t)$ есть решение уравнения (1).

Доказательство. Вычитая из (1) (7), получим

$$x(t) - \xi(t) = \varepsilon \int_0^t K[\varepsilon(t-s)] [f_0(s, x(s)) - f_0(s, \xi(s))]\, ds +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t K[\varepsilon(t-s)] f_1(s, x(s))\, ds.$$

Оценим уклонение $|x(t) - \xi(t)|$ на интервале $L\varepsilon^{-1}$. В силу в) и г) имеем

$$|x - \xi| < K_0 \lambda \int_0^u |x - \xi|\, du + \varepsilon \left| \int_0^t K[\varepsilon(t-s)] f_1(s_1 x(s))\, ds \right|,$$

$$(\varepsilon s = u;\ 0 \leqslant u \leqslant L).$$

На основании лемм 1 и 2 для любого η можно указать такое ε_0, что при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ будет выполняться:

$$\varepsilon \left| \int_{-\infty}^{\infty} K\left[\varepsilon(t-s)\right] f_1(s_1 x(s))\, ds \right| < \eta e^{-k_0 \lambda L}.$$

Отсюда из (10) в силу леммы Гроноулла—Беллмана следует утверждение теоремы.

Усреднение в системах вида (2)

Пусть подынтегральная функция в уравнении (2) представима в виде суммы

$$K(t, s, x) = K_0(t, s, x) + K_1(t, s, x),$$

и пусть равномерно по $x \in D \subseteq E_n$ и $t > 0$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T K_1(t, s, x)\, ds = 0.$$

Тогда уравнению (2) можно поставить в соответствие усредненное уравнение

$$\xi(t) = \varepsilon \int_0^t K_0(t, s, \xi(s))\, ds.$$

Решение этого уравнения при некоторых условиях может быть близким к решению уравнения (2). На функцию $K(t, s, x)$ налагаются ограничения такого же характера, как и условия а)—д) теоремы 1.

Доказательство такой теоремы можно провести методом работы [5].

О переходных процессах в системах АРУ со сложным фильтром

Рассмотрим систему автоматической регулировки усиления для РЛС с коническим сканированием луча. Процесс регулировочного напряжения в такой системе определяется уравнением следующего вида:

$$x(t) = \int_0^t G(t-S)\, A(s)\,(1 + m\cos\omega_0 s)\, K(x(s))\, ds, \tag{9}$$

где $A(s)(1 + m\cos\omega_0 s)$ — входной сигнал системы, причем $A(s)$ — медленно меняющаяся функция, определяющая амплитуду входного сигнала, $K(x)$ — коэффициент усиления, зависящий от регулировочного напряжения, $G(t)$ — переходная функция фильтра АРУ.

При проектировании АРУ фильтр обычно выбирается по частотной характеристике. Пусть фильтр состоит из последовательности двух линейных фильтров, сглаживающего фильтра с частотной характеристикой

$$W_1(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega T} \tag{10}$$

и запирающего фильтра — пробки типа двойного Т-образного с частотной характеристикой

$$W_2(i\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - i2\delta\omega - \omega^2}.$$

Общая частотная характеристика $W(i\omega) = W_1(i\omega)\,W_2(i\omega)$.

Проделав над ней преобразование Фурье, получим переходную функцию

$$G(t) = \frac{1}{T}\exp\left(-\frac{t}{T}\right) + \frac{2\delta}{T\omega_0}\exp(-\delta t)\sin\omega_0 t,\ t > 0.$$

Заменой переменных $\omega_0 t = u$, $\omega_0 S = v$ и введением малого параметра $\varepsilon = 1/\omega_0 T$ уравнение (9) сводится к виду

$$x(u) = \varepsilon\int_0^u G_1(u-v)\,A\left(\frac{v}{\omega_0}\right)(1 + m\cos v)\,K(x(v))\,dv, \tag{11}$$

где

$$G_1(u) = \exp(-\varepsilon u) + 2\delta\varepsilon\exp(-\varepsilon\delta T u)\sin u.$$

В силу теоремы 1 и замечания к ней к уравнению (11) применим принцип частичного усреднения (при соответствующих условиях на $A(t)$). Частично усредненное уравнение имеет вид

$$\xi(u) = \varepsilon\int_0^u G_1(u-v)\,A\left(\frac{v}{\omega_0}\right)K(\xi(v))\,dv. \tag{12}$$

Это уравнение можно заменить приближенным еще более простым.

Обозначим

$$y(v) = A\left(\frac{v}{\omega_0}\right)K(\xi(v)),$$

тогда можно записать

$$\xi(u) = \varepsilon\int_0^u G_1(u-v)\,y(v)\,dv. \tag{13}$$

Применив к (13) преобразование Лапласа (с учетом замены переменных), получим

$$\xi(p) = W(p)\,\hat{y}(p) = W_1(p)\,(W_2(p)\,\hat{y}(p)) = W_1(p)\hat{z}(p)$$

и, произведя обратное преобразование Лапласа, получим

$$\xi(u) = \varepsilon\int_0^u \exp[\varepsilon(v-u)]\,z(v)\,dv. \tag{14}$$

В то же время

$$z(v) = \int_0^v G_2(v-s)\,y(s)\,ds = \int_0^v G_2(v-s)\,A\left(\frac{s}{\omega_0}\right)K(\xi(s))\,ds, \tag{15}$$

где $G_2(v)$ — переходная функция фильтра:

$$G_2 v = \delta(v) - \varepsilon\delta T \exp(-\varepsilon\delta T v)\cos v \tag{16}$$

(дельта-функция играет роль оператора тождественного преобразования).

Подставляя (16) в (15), получим

$$z(v) = A\left(\frac{v}{\omega_0}\right) K(\xi(v)) - \int_0^v \varepsilon\delta T \exp[\varepsilon\delta T(s-v)] \cos(v-s) A\left(\frac{s}{\omega_0}\right) K(\xi)\, ds.$$

Последний интеграл представляет собой усредняемую функцию переменной v, причем среднее равно нулю.

Применяя в уравнении (14) к функции $z(v)$ принцип частичного усреднения, получим

$$\theta(u) = \int_0^u \varepsilon \exp[\varepsilon(v-u)] A\left(\frac{v}{\omega_0}\right) K(\theta(v))\, dv. \tag{17}$$

Согласно теории, решение этого уравнения при достаточно малом ε близко к решению исходного уравнения (12). Отсюда следует, что переходные процессы в рассмотренной системе определяются в первом приближении сглаживающим звеном фильтра.

Уравнение (17) много проще исходного и решение такого уравнения при различных A и K уже исследовалось многими авторами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике. В сб. трудов Института строительной механики АН УССР, № 14, 9—34, 1950.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
3. Филатов А. Н. В сб.: «Исследования по аналитической механике». «Наука», УзССР, Ташкент, 1967.
4. Ларичева В. В., Рейн Т. В. ДАН СССР, **174**, № 1, 1967.
5. Хапаев М. М. «Дифференциальные уравнения», 2, № 5, 1966.
6. Винер Н. Преобразование Фурье. М., «Наука», 1964.
7. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
14.8 1968 г.

Кафедра
математики