УДК 539.1.01

О. Е. ШИШАНИН

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Теория синхротронного или магнитотормозного излучения при движении электрона по окружности достаточно хорошо изучена. В последнее время появилась необходимость изучения заряженных частиц, двигающихся по спирали в магнитном поле. Этот вопрос уже рассматривался, например в [1]. В настоящей работе найдены более точно некоторые формулы синхротронного излучения для спирального и кругового движения электрона в однородном магнитном поле.

Прежде всего уточним асимптотическое представление функций Бесселя $J_\nu(x)$. Несколько асимптотических формул для бесселевых функций с большим индексом были получены Ватсоном [2] и В. А. Фоком [3]. В [4] и [5] исследовалось спектрально-угловое распределение интенсивности излучения ультрарелятивистского электрона, движущегося по окружности в магнитном поле, с помощью асимптотического представления функций Бесселя

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{-\frac{z_1}{z_1' x}}\, K_{1/3}(z_1), \tag{1}$$

в [5] $z_1 = \frac{\nu}{3}\left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right)^{3/2}$, где $x = \nu\beta\sin\theta$, ν — номер гармоники, θ — угол излучения в сферической системе координат. Когда x близко к ν, формулы, полученные в [2, 5, 4], дают хорошее приближение. В работе [3] найдено соотношение

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\alpha \operatorname{cth}\alpha - 1}\, K_{1/3}(\nu\alpha - \nu \operatorname{th}\alpha). \tag{2}$$

Здесь $x = \nu \operatorname{sech}\alpha$, $x \leqslant \nu$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$. Эта формула справедлива в более широком интервале изменения аргумента x. Однако из-за наличия гиперболических функций использование (2) в нашем случае вызвало бы трудности при вычислении угловых интегралов.

Формулу (1) можно уточнить, если взять следующий член разложения для z_1, аргументом функции $K_{1/3}$ уже будет $z_2 = \frac{\nu}{3}\left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right)^{3/2} + \frac{\nu}{5}\left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right)^{5/2}$. Параметром разложения является величина $\varepsilon = 1 - \frac{x^2}{\nu^2}$, которая в ультрарелятивистском случае мала ($\varepsilon \ll 1$). Эта асимптотика оказывается применимой также и для движения электрона по спирали, только в этом случае необходимо произвести замены β на

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta_3^2}{1 - \beta_3^2}} \text{ и } \sin\theta \text{ на } \sin\theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta_3^2}\,\sin\theta}{1 - \beta_3\cos\theta},$$

где $c\beta_3$ есть составляющая скорости электрона вдоль магнитного поля.

Все дальнейшие формулы напишем именно для этого случая, причем поправочные члены будем заключать в квадратные скобки. Для асимптотики функции Бесселя и ее производной найдем

$$J_\nu(\nu\beta_0\sin\theta') = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{3}}\left\{K_{1/3} + \frac{1}{10}\varepsilon\left[K_{1/3} - 2\nu\varepsilon^{3/2}K_{2/3}\right]\right\}, \tag{3}$$

$$J_\nu'(\nu\beta_0\sin\theta') = \frac{\varepsilon}{\pi\sqrt{3}}\left\{K_{2/3} + \frac{1}{5}\varepsilon\left[2K_{2/3} - \left(\frac{1}{\nu\varepsilon^{3/2}} + \nu\varepsilon^{3/2}\right)K_{1/3}\right]\right\}, \tag{4}$$

где $\varepsilon = 1 - \beta_0^2 \sin^2\theta'$, а величина $\frac{\nu}{3}\varepsilon^{3/2}$ является аргументом функций K. Отброшенные члены в (3) имеют порядок $\varepsilon^{5/2}$. Отметим связь формул (2) и (3). Обозначим $\operatorname{th}\alpha = \varepsilon^{1/2}$, тогда $\alpha = \operatorname{arth}\varepsilon^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\varepsilon^{1/2}}{1-\varepsilon^{1/2}}$. Поскольку $\varepsilon \ll 1$, то логарифм можно разложить в ряд и ограничиться двумя первыми членами. Получим, что $\alpha \approx \varepsilon^{1/2} + \frac{\varepsilon^{3/2}}{3}$. Если выразим в формуле (2) все значения α через ε, произведем разложение и отбросим члены порядка $\varepsilon^{5/2}$, то в результате получим формулу (3).

Формулы для спектрально-углового распределения в случае движения электрона по спирали можно получить непосредственным вычислением или с помощью соответствующих преобразований Лоренца формулы Шотта. Для компонентов линейной поляризации интенсивности излучения при спиральном движении получим

$$dW_\sigma(\nu,\theta') = \frac{3}{2}W_0\nu^2\varepsilon_0(1+\beta_3\cos\theta')\beta_0^2 J_\nu'^2(\beta_0\nu\sin\theta')\sin\theta' d\theta',$$
$$dW_\pi(\nu,\theta') = \frac{3}{2}W_0\nu^2\varepsilon_0(1+\beta_3\cos\theta')\operatorname{ctg}^2\theta' J_\nu^2(\beta_0\nu\sin\theta')\sin\theta' d\theta', \tag{5}$$

где $W_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{e_0^4H^2}{m_0^2c^3}$, $\varepsilon_0 = 1-\beta_0^2$. Частота излучения $\omega = \frac{e_0H}{m_0c}\sqrt{1-\beta^2}\frac{\nu}{1-\beta_3\cos\theta}$.

С помощью (3) и (4) спектрально-угловое распределение (5) можно представить в таком виде:

$$dW_\sigma(\nu,\theta') = \frac{1}{2\pi^2}W_0\nu^2\varepsilon_0(1+\beta_3\cos\theta')\beta_0^2\left\{\varepsilon^2K_{2/3}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\varepsilon^3\left[4K_{2/3}^2 - 2\left(\frac{1}{\nu\varepsilon^{3/2}} + \nu\varepsilon^{3/2}\right)K_{1/3}K_{2/3}\right]\right\}\sin\theta' d\theta', \tag{6}$$
$$dW_\pi(\nu,\theta') = \frac{1}{2\pi^2}W_0\nu^2\varepsilon_0(1+\beta_3\cos\theta')\operatorname{ctg}^2\theta'\left\{\varepsilon K_{1/3}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\varepsilon^2\left[K_{1/3}^2 - 2\nu\varepsilon^{3/2}K_{1/3}K_{2/3}\right]\right\}\sin\theta' d\theta'.$$

Проинтегрировав (6) по углу θ' (метод интегрирования см. в [5], стр. 114), получим спектральное распределение компонентов линейной поляризации

$$W_\sigma(\nu) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}W_0\nu\varepsilon_0^2\left\{\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx + K_{2/3}(y) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{20}\varepsilon_0\left[7K_{2/3}(y) + \left(16\nu\varepsilon_0^{3/2} + 11\frac{1}{\nu\varepsilon_0^{3/2}}\right)K_{1/3}(y) + 5\int_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx\right]\right\},$$
$$W_\pi(\nu) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}W_0\nu\varepsilon_0^2\left\{\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx - K_{2/3}(y) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{20}\varepsilon_0\left[7K_{2/3}(y) + 3\frac{1}{\nu\varepsilon_0^{3/2}}K_{1/3}(y) - 15\int_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx\right]\right\}, \tag{7}$$

здесь $y = \frac{2}{3} \nu \varepsilon_0^{3/2}$.

Наконец, учитывая, что в области больших ν изменение частоты излучения почти непрерывно, проинтегрируем выражение (7) по гармоникам и получим значение для σ и π-компонентов полной интенсивности излучения:

$$W_\sigma = \frac{7}{8} W_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{8}{7} \varepsilon_0\right), \quad W_\pi = \frac{1}{8} W_0 \frac{1}{\varepsilon_0}. \tag{8}$$

Сложив W_σ и W_π, получим полную интенсивность излучения

$$W = \frac{2}{3} \frac{e_0^4 H^2}{m_0^2 c^3} \frac{\beta^2 - \beta_3^2}{1 - \beta^2}. \tag{9}$$

Формулы (3), (4), (6)—(8) приближенны. Однако сумма W_σ и W_π компонентов дает точное выражение (9) для полной интенсивности.

Формулы (3)—(9) применимы также и для движения электрона по окружности с ультрарелятивистской скоростью, если вместо β_0 и $\sin\theta'$ соответственно написать везде β и $\sin\theta$, причем множитель $(1+\beta_3\cos\theta')$ в (5) и (6) отсутствует, а в (9) $\beta_3=0$.

В случае движения электрона по спирали требует особого рассмотрения вопрос об использвании асимптотики (3). Прежде всего необходимо, чтобы $\beta_3 \ll \beta$; если же β_3 близко к β, то будет излучаться основной тон и интегрирование формул (7) по квазинепрерывному спектру теряет смысл.

С другой стороны, асимптотику с поправкой для спирального движения можно использовать в том случае, если $\beta_3 > \varepsilon_0$; при $\beta_3 < \varepsilon_0$ члены в (6), пропорциональные $\varepsilon_0^2 \beta_3^2$, будут меньше, чем отбрасываемые в том же асимптотическом выражении члены, пропорциональные ε_0^4. При $\beta_3 < \varepsilon_0$ нужно ограничиться асимптотикой с поправкой для кругового движения.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Соколову за постановку задачи и В. Ч. Жуковскому за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М., Багров В. Г., Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч. «Изв. вузов», физика, № 5, 13, 1968.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ, 1949, стр. 276.
3. Фок В. А. ДАН СССР, 1, 96, 1934.
4. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля, 1951.
5. Сб. «Синхротронное излучение» под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
7.10 1968 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 533.99:621.374.4

А. А. БРАНДТ, С. В. БОВИН, Ю. В. ТИХОМИРОВ

РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ ПЛАЗМЕННЫЙ УМНОЖИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ

В настоящей работе приведены результаты исследования распределенного плазменного умножителя частоты, длина разрядной камеры которого сравнима с длиной волны подводимых колебаний. На рис. 1 показан разрез умножительного элемента, состоящего из стеклянной разрядной камеры, образованной двумя коаксиальными