ЛИТЕРАТУРА

1. Басьюни А., Курдгеланидзе Д. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 1969.
2. Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н. Преприт, Дубна, ОИЯИ Д—1968, 1965.
3. Боголюбов Н. Н. Лекции по теории симметрии элементарных частиц. Изд-во МГУ, 1966.

Поступила в редакцию
25.10 1968 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 517.919

В. М. ВОЛОСОВ, Б. И. МОРГУНОВ

ОБ УСРЕДНЕНИИ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим квазилинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&\dot{y} = A(\mu)\, y + f(\mu, \xi, t) + \varepsilon g(\mu, y, \xi, t, \varepsilon),\\
&\dot{\mu} = \varepsilon M(\mu, y, \xi, t, \varepsilon), \qquad\qquad (1)\\
&\dot{\xi} = \nu(\mu) + \varepsilon \Xi(\mu, y, \xi, t, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

где $y=\{y_1, \ldots, y_n\}$, $\mu=\{\mu_1, \ldots, \mu_e\}$, $\xi=\{\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}\}$, $A(\mu)$ — $n\times n$-матрица, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Системы типа (1) изучались с помощью асимптотических методов (см. [1]—[4]). В настоящей заметке мы рассмотрим применение к системе (1) общей методики усреднения нелинейных систем, описывающих медленные и быстрые движения, развитой в [5]—[7]. Для применения указанной методики необходимо преобразовать исходную систему (1).

Преобразование системы (1). Будем предполагать, что в некоторой области правые части (1) достаточно гладки, все собственные значения матрицы $A(\mu)$ имеют неположительные вещественные части и, кроме того, чисто мнимые собственные значения имеют простые элементарные делители. Мы считаем также, что кратность собственных значений и элементарных делителей постоянна в указанной области. Замена $y=U(\mu, t)+u$, где U — частное решение вырожденной неоднородной системы (при $\varepsilon=0$) $\dot{y}=Ay+f$, $\dot{\mu}=0$, $\dot{\xi}=\nu$ (для U легко может быть выписано явное выражение) приводит (1) к виду

$$
\begin{aligned}
&\dot{u} = A(\mu)\, u + \varepsilon g(\mu, u, \vartheta, \varepsilon), \qquad\qquad (2)\\
&\dot{\mu} = \varepsilon M(\mu, u, \vartheta, \varepsilon),\\
&\dot{\vartheta} = \nu(\mu) + \varepsilon \Theta(\mu, u, \vartheta, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

где $\vartheta=\{\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, t\}$. При указанных условиях существует неособое гладкое преобразование $z=B(\mu)u$, приводящее систему $\dot{u}=Au+\varepsilon g$ к виду $\dot{z}=Iz+\varepsilon\bar{g}$, где матрица $I(\mu)$ имеет нормальную жорданову форму. Если предположить для простоты, что матрица $A(\mu)$ имеет простые собственные значения, то в качестве строк матрицы B можно взять собственные векторы матрицы A', транспонированной к A. Проводя для этого случая в системе (2) преобразование $z=B(\mu)u$, вводя вещественные комбинации новых переменных z и заменяя переменные, соответствующие чисто мнимым собственным значениям, по формулам

$$
\frac{1}{2}(z_{2j-1}+z_{2j}) = F_j \cos\eta_j, \quad \frac{1}{2i}(z_{2j-1}-z_{2j}) = F_j \sin\eta_j,
$$

придем к системе вида

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mu} = \varepsilon M(\mu, F, k, h, l, \eta, \vartheta, \varepsilon),\\
&\dot{F} = \varepsilon F(\mu, F, k, h, l, \eta, \vartheta, \varepsilon),\\
&\dot{\eta} = \bar{\omega}(\mu) + \varepsilon H(\mu, F, k, h, l, \eta, \vartheta, \varepsilon),\\
&\dot{\vartheta} = \nu(\mu) + \varepsilon \Theta(\mu, F, k, h, l, \eta, \vartheta, \varepsilon), \qquad\qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$\dot{k} = \varkappa(\mu) k + \varepsilon K(\mu, F, k, h, l, \eta, \vartheta, \varepsilon),$$

$$\dot{h} = \alpha(\mu) h - \beta(\mu) l + \varepsilon \mathscr{H}(\mu, F, k, h, l, \eta, \vartheta, \varepsilon),$$

$$\dot{l} = \beta(\mu) h + \alpha(\mu) l + \varepsilon L(\mu, F, k, h, l, \eta, \vartheta, \varepsilon),$$

где $\pm i\overline{\omega}(\mu)$, $\varkappa(\mu)$, $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ — собственные значения матрицы $A(\mu)$, функции F, H, $K, \mathscr{H}, L$ — некоторые линейные комбинации правых частей (2) с коэффициентами, зависящими от μ, для которых могут быть выписаны явные выражения. Объединяя переменные μ и F в вектор x, переменные η и ϑ в вектор ψ, а переменные k, h, l в вектор q, мы запишем (3) в виде

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, \psi, q, \varepsilon),$$

$$\dot{\psi} = \omega(x) + \varepsilon \Psi(x, \psi, q, \varepsilon), \tag{4}$$

$$\dot{q} = \gamma(x) q + \varepsilon Q(x, \psi, q, \varepsilon),$$

где $\gamma(X)$ — клеточно-диагональная матрица с клетками типа $\varkappa(x)$ или $\begin{pmatrix} \alpha(x) & -\beta(x) \\ \beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$. В общем случае (при кратных собственных значениях) (1) преобразуется аналогичным образом.

Усреднение системы (4) (нерезонансный случай). Рассмотрим усреднение системы (4) в первом и втором приближении по степеням малого параметра ε, следуя общей схеме, развитой в [5], [6]. В первом приближении запишем систему (4) в виде

$$\dot{x} = \varepsilon X_1(x, \psi, q) + \varepsilon^2 \ldots, \qquad X_1 = X|_{\varepsilon=0},$$

$$\dot{\psi} = \omega(x) + \varepsilon \ldots, \tag{5}$$

$$\dot{q} = \gamma(x) q + \varepsilon \ldots$$

Введем средние значения правых частей (5) по формулам

$$\overline{X}_1(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_1(x, \omega(x) t + \psi_0, \varphi(q_0, x, t))\, dt, \tag{6}$$

где $\psi = \omega(x) t + \psi_0$, $q = \varphi(q_0, x, t)$ — общее решение вырожденной системы, которая получается из (4) при $\varepsilon = 0$ (ψ_0 и q_0 — значения переменных ψ и q соответственно при $t = 0$). Произведем в системе (5) замену $x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{q}) + 0(\varepsilon^2)$, $\psi = \bar{\psi} = \omega(\bar{x}) t + \psi_0 + 0(\varepsilon)$, $q = \bar{q} = \varphi(q_0, \bar{x}, t) + 0(\varepsilon)$, где u_1 — решения уравнений $\frac{\partial u_1}{\partial \bar{\psi}} \omega(\bar{x}) + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{q}} \gamma(\bar{x}) \bar{q} = \widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_1 = \overline{X}_1 - X_1$, которые можно взять в виде

$$u_1 = \int_0^t \widetilde{X}_1(\bar{x}, \omega(\bar{x}) t + \psi_0, \varphi(q_0, \bar{x}, t))\, dt, \quad \bar{\psi} = \omega(\bar{x}) t + \psi_0, \quad \bar{q} = \varphi(q_0, \bar{x}, t).$$

Назовем усредненной системой первого приближения систему $\dot{\bar{x}} = \varepsilon \overline{X}(\bar{x})$. Можно утверждать, что при выполнении некоторых дополнительных условий (см. [5], [6]) решения $\bar{x}$ усредненной системы и исходной системы (5), совпадающие при $t=0$, будут асимптотически близки на интервале $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

Во втором приближении по ε запишем исходную систему в виде

$$\dot{x} = \varepsilon X_1(x, \psi, q) + \varepsilon^2 X_2(x, \psi, q) + \varepsilon^3 \ldots, \qquad X_2 = \left.\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$\dot{\psi} = \omega(x) + \varepsilon \Psi_1(x, \psi, q) + \varepsilon^2 \ldots, \qquad \Psi_1 = \Psi|_{\varepsilon=0}, \tag{7}$$

$$\dot{q} = \gamma(x) q + \varepsilon Q_1(x, \psi, q) + \varepsilon^2 \ldots, \qquad Q_1 = Q|_{\varepsilon=0}.$$

Усредненная система второго приближения имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \overline{X}_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}), \quad \dot{\bar{\psi}} = \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}), \quad \dot{\bar{q}} = \gamma(\bar{x}) \bar{q}. \tag{8}$$

Коэффициенты u_2, v, w_1 преобразования $x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{q}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{q}) + \varepsilon^3, \ldots$

$\psi=\overline{\psi}+\varepsilon v_1(\overline{x}, \overline{\psi}, \overline{q})+\varepsilon^2\ldots, \quad q=\overline{q}+\varepsilon W_1(\overline{x}, \overline{\psi}, \overline{q})+\varepsilon^2\ldots$, приводящего [7] к [8], и функции A_2 и B_1 определяются по формулам, указанным в [5]. Аналогичным образом могут быть построены приближения любого порядка по ε. Здесь предполагается, что средние типа [6] существуют и достаточно гладки. При некоторых общих ограничениях (см. [5]) это условие действительно выполняется. Кроме того, при вычислении [6] следует вместо $\varphi(q_0, x, t)$ подставить нулевые значения.

Резонансный случай. Рассмотрим случай, когда для некоторого значения $x=x_0$ выполняются соотношения $N_j\omega(x_0)=0$, $j=1, \ldots, r$, N_j — целочисленный вектор (этот случай будем называть резонансным). Вводя новые переменные $\varphi_j=N_j\psi$, $j=1, \ldots, r$ (расстройки), как это сделано в [7], можно получить уравнения, определяющие стационарные резонансные значения медленных переменных x и расстроек φ, и получить достаточные условия устойчивости найденных стационарных режимов.

Пример. В качестве примера рассмотрим уравнение колебаний резца, встречающееся в теории резания металлов:

$$\dddot{x}+\frac{1}{T}\ddot{x}+\frac{C}{m}\dot{x}+\frac{C}{mT}x=\varepsilon f(x, \dot{x}),$$

где T, C, m — постоянные, f — некоторая нелинейная функция. Производя замену $x=G+F\cos\psi$, для G, F, ψ получим систему уравнений, являющуюся частным случаем (4), которая может быть усреднена по предложенной схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николаенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1966.
3. Байнов Д. Д. «Математички весник», 5(20), 53—62, 1968.
4. Байнов Д. Д. «Математички весник», 5(20), 198—204, 1968.
5. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», 17, вып. 6 (108), 3—126, 1962.
6. Волосов В. М. «Журн. вычислит. матем. и матем. физика», 3, № 1, 3—53, 1963.
7. Волосов В. М., Моргунов Б. И. «Журн. вычислит. матем. и матем. физики», 8, № 2, 251—294, 1968.

Поступила в редакцию
6.1 1969 г.

Кафедра
математики

А. Т. ПОЛУХИН

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ ПУЧКА НА УСТОЙЧИВОСТЬ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ВОЛНОВОДЕ, НАГРУЖЕННОМ ДИАФРАГМАМИ

Экспериментально обнаружено [1], что в линейных электронных ускорителях при определенном токе, получившем название порогового, возникают неустойчивости, разрешающие пучок. Такая неустойчивость связывается с усилением пучком возникающих в диафрагмированной камере ускорителя аксиально несимметричных волн [2]. Низшая гибридная мода этих волн HEM_{11} имеет фазовую скорость равную c, и эффективно взаимодействует с ультрарелятивистским пучком. Анализ неустойчивости для моноэнергетических пучков частиц и осевых токов выполнен, в частности, в работе [3]. В настоящей работе исследуется зависимость неустойчивости от разброса частиц по импульсам, а также от распределения плотности частиц. Показывается, что для некоторого довольно широкого класса распределений плотности в пучке указанная неустойчивость не имеет места. В случае неустойчивости даются формулы для пороговых токов.

Представим возмущенную часть поля в виде

$$\vec{E}=\vec{E}_\nu\exp(i\omega t-ikz), \tag{1}$$

где величина $\vec{E}_\nu$ является медленной функцией координат и времени. Нами используется цилиндрическая система координат с осью z вдоль оси волновода. Представ-