

$\psi = \bar{\psi} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{q}) + \varepsilon^2 \dots$, $q = \bar{q} + \varepsilon W_1(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{q}) + \varepsilon^2 \dots$, приводящего [7] к [8],

и функции A_2 и B_1 определяются по формулам, указанным в [5]. Аналогичным образом могут быть построены приближения любого порядка по ε . Здесь предполагается, что средние типа [6] существуют и достаточно гладки. При некоторых общих ограничениях (см. [5]) это условие действительно выполняется. Кроме того, при вычислении [6] следует вместо $\Phi(q_0, x, t)$ подставить нулевые значения.

Резонансный случай. Рассмотрим случай, когда для некоторого значения $x = x_0$ выполняются соотношения $N_j \omega(x_0) = 0$, $j = 1, \dots, r$, N_j — целочисленный вектор (этот случай будем называть резонансным). Вводя новые переменные $\varphi_j = N_j \psi$, $j = 1, \dots, r$ (расстройки), как это сделано в [7], можно получить уравнения, определяющие стационарные резонансные значения медленных переменных \dot{x} и расстроек φ , и получить достаточные условия устойчивости найденных стационарных режимов.

Пример. В качестве примера рассмотрим уравнение колебаний резца, встречающееся в теории резания металлов:

$$\ddot{x} + \frac{1}{T} \dot{x} + \frac{C}{m} x + \frac{[C]}{mT} x = \varepsilon f(x, \dot{x}),$$

где T , C , m — постоянные, f — некоторая нелинейная функция. Производя замену $x = G + F \cos \psi$ для G , F , ψ получим систему уравнений, являющуюся частным случаем (4), которая может быть усреднена по предложенной схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николаенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1966.
3. Байнов Д. Д. «Математички весник», 5(20), 53—62, 1968.
4. Байнов Д. Д. «Математички весник», 5(20), 198—204, 1968.
5. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», 17, вып. 6 (108), 3—126, 1962.
6. Волосов В. М. «Журн. вычислит. матем. и матем. физика», 3, № 1, 3—53, 1963.
7. Волосов В. М., Моргунов Б. И. «Журн. вычислит. матем. и матем. физики», 8, № 2, 251—294, 1968.

Поступила в редакцию
6.1 1969 г.

Кафедра
математики

А. Т. ПОЛУХИН

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ ПУЧКА НА УСТОЙЧИВОСТЬ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ВОЛНОВОДЕ, НАГРУЖЕННОМ ДИАФРАГМАМИ

Экспериментально обнаружено [1], что в линейных электронных ускорителях при определенном токе, получившем название порогового, возникает неустойчивость, разрешающие пучок. Такая неустойчивость связывается с усилением пучком возникающих в диафрагмированной камере ускорителя аксиально несимметричных волн [2]. Низшая гибридная мода этих волн HEM_{11} имеет фазовую скорость равную c , и эффективно взаимодействует с ультрарелятивистским пучком. Анализ неустойчивости для моноэнергетических пучков частиц и осевых токов выполнен, в частности, в работе [3]. В настоящей работе исследуется зависимость неустойчивости от разброса частиц по импульсам, а также от распределения плотности частиц. Показывается, что для некоторого довольно широкого класса распределений плотности в пучке указанная неустойчивость не имеет места. В случае неустойчивости даются формулы для пороговых токов.

Представим возмущенную часть поля в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_v \exp(i\omega t - ikz), \quad (1)$$

где величина \vec{E}_v является медленной функцией координат и времени. Нами используется цилиндрическая система координат с осью z вдоль оси волновода. Представ-

ление поля в виде (1) возможно для немодулированного пучка в неограниченной гладкой замедляющей структуре, в которой спектр волновых чисел k непрерывен. Однако, приближение неограниченного волновода выполняется также в случае ограниченных структур, если отношение λ/L , где λ — длина волны, L — длина системы, достаточно мало [3].

Для медленной функции E_{ν} можно получить уравнение [4]

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{\nu} + \frac{\partial}{\partial r} (\vec{v}_2 W_{\nu}) = -2\Gamma W_{\nu} + \vec{j}^b \vec{E}_{\nu}, \quad (2)$$

где для рассматриваемого нами случая:

$$W_{\nu} = \vec{E}_{\nu} |4\pi|\beta_2|, \quad |\beta_2| = |v_2/c|,$$

v_2 — групповая скорость, Γ — декремент затухания волны на стенках камеры. В уравнении (2) учтено, что групповая скорость отрицательна. Величина Γ связывается с добротностью камеры Q на частоте ω , $\Gamma = \omega/Q$. Для определения \vec{j}^b — возмущенной части тока, воспользуемся уравнениями [5]

$$m_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}_{\perp}^b = \frac{e v_{\Phi}}{k} \vec{\nabla}_{\perp} E_z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^b + d i v \vec{j}^b = 0, \quad \vec{j}^b = e n_z v \rho^b + e \vec{v}^b \rho,$$

где ρ^b , ρ — соответственно возмущенная и равновесная часть плотности, v — скорость частиц, $v_{\Phi} = \omega/k$, \vec{n}_z — единичный вектор, γ — релятивистский фактор. В итоге при учете распределения частиц по скоростям и пренебрежении конвективными производными в (2) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\Gamma \right) \vec{E}_{\nu}^2 = \frac{2\pi r_0 c^4 |\beta_2|}{\omega \gamma} \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} E_{\nu z}^2 \int \frac{f(v) dv}{(\omega - kv)^2}, \quad (4)$$

где $r_0 = e^2/m_0 c^2$, функция $f(v)$ нормирована на единицу.

Рассмотрим сначала случай осевых токов, т. е. $\rho \sim \delta(r)/r$. Представим $\vec{E}_{\nu} = \vec{\mathcal{E}} \exp(\nu t)$, где $|\nu| \ll \omega$, и проинтегрируем (4) по объему камеры V . В результате получим

$$\nu + \Gamma = -\mu r_0 \omega^3 \gamma^{-1} \int (\omega - kv)^{-2} f dv, \quad (5)$$

где I — мгновенный ток,

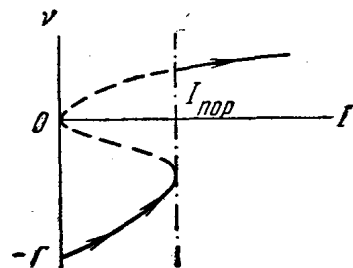
$$\mu = 2\pi c^3 |\beta_2| e^{-1} \omega^{-4} L \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{E}_z(0) \right)^2 \left| \int_V \mathcal{E}^2 dV. \quad (6)$$

Величины $\vec{\mathcal{E}}$ в (6) считаются приближенно равными соответствующим составляющим волны НЕМ₁₁. Рассмотрим (5) для некоторых характерных распределений $f(v)$.

Возьмем моноэнергетический пучок $f = \delta(v - \langle v \rangle)$. Согласно (5) получаем, что решением здесь является синхронная с пучком волна. Значения ν находятся из уравнения

$$\nu + \Gamma = \mu r_0 \omega^3 I / \gamma v^2. \quad (7)$$

В предельных случаях $\nu \ll \Gamma$, $\nu \gg \Gamma$ отсюда, в частности, следуют инкременты нарастания, данные в работе [3]. График зависимости ν от I представлен на рисунке. Стрелками показано изменение ν с ростом тока в камере от нуля. Когда величина тока достигает значения $I = I_{\text{пор}}$, величина ν испытывает скачок из отрицательной области в положительную. При этом волны в камере становятся нарастающими. Следовательно, величину $I_{\text{пор}}$ естественно определить как пороговое значение тока. В данном случае



$$I_{\text{пор}} = \frac{4\gamma\Gamma^3}{27\mu r_0 \omega^3} \equiv \frac{4\gamma}{27\mu r_0 Q^3}. \quad (8)$$

Отметим, что в области $I < I_{\text{пор}}$ возможны также значения ν , указанные на графике пунктиром. Однако для реального их осуществления, очевидно, требуется дополнительное возбуждение системы.

Возьмем гауссовское распределение $f = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp[-(v - \langle v \rangle)^2 / 2\sigma^2]$. Для малого разброса частиц по импульсам имеем

$$I_{\text{пор}} = \frac{4\gamma}{27\mu r_0 Q^3} \left[1 + \left(\frac{3}{2} \frac{Q}{\gamma} \frac{\Delta p}{p} \right)^2 + \dots \right], \quad (9)$$

где $\Delta p/p$ — относительная величина импульсного разброса частиц. Увеличение порогового тока при наличии импульсного разброса объясняется тем, что уже не все частицы пучка оказываются в точном синхронизме с возмущающей волной.

Предыдущий анализ был выполнен для осевых токов. Возьмем плотность вида

$$\rho = \begin{cases} \rho(r), & a \leq r \leq b, \quad a > 0. \\ 0, & r \notin [a, b]. \end{cases} \quad (10)$$

Будем считать пучок моноэнергетическим. Тогда, согласно (4), имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\Gamma \right) (E_{\nu z}^2 + E_{\nu \perp}^2) = 2\kappa \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} E_{\nu z}^2 (\omega - k \langle v \rangle)^{-2}, \quad (11a)$$

где $\kappa = \pi r_0 c^4 |\beta^2| / \omega \gamma$, $E_{\nu z}$ — продольная, $E_{\nu \perp}$ — поперечная составляющие поля возмущения. В уравнение (11) одновременно входят две искомые величины, $E_{\nu z}$ и $E_{\nu \perp}$. При подстановке в (11a) значения $E_{\nu \perp}$, равного в нулевом приближении $\mathcal{E}_{\perp} \exp(-\Gamma t)$, для составляющей $E_{\nu z}$ получаем уравнение первого приближения.

Считая $E_{\nu z} = \mathcal{E}_z \exp(\nu t)$, получим

$$\nu^2 (\nu + \Gamma) \mathcal{E}_z^2 = -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{E}_z^2. \quad (11b)$$

При решении (11b) будем считать, что поле в камере вне области $[a, b]$ является полем волны НЕМ₁₁. Такое представление оправдывается до тех пор, пока наличие пучка в камере можно рассматривать как возмущение системы. При этом можно считать, что заметное искажение поля волны, возмущенного для холодной системы, имеет место лишь вблизи границ пучка. В итоге, из решения (11b) с учетом граничных условий находим, что при

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^{-1} dr > 0 \quad (12)$$

величина ν может быть только отрицательной, т. е. волны в камере являются затухающими. Такой результат можно качественно понять, если учесть, что в рассматриваемом ультрарелятивистском случае направление тока возмущения в пучке пропорционально $\partial \rho / \partial r$. Следовательно, в трубчатых пучках появляются области, где направления тока возмущения и переноса энергии волны противоположны. Здесь происходит взаимное ослабление возмущений пучка и волны. Неравенство (12) дает условие, когда действие таких областей в пучке становится определяющим.

В заключение автор выражает глубокую признательность А. А. Коломенскому за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишняков В. А. и др. ЖТФ, 38, 133, 1968.
2. Ni g a k a w a Н. Jap. Jor nel of apply Phys., 3, 27, 1964.
3. Курилко В. И. ЖТФ, 38, 118, 1968.
4. Климантович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Изд-во МГУ, 1964, стр. 48.
5. N a h n Н. Rev. Sci. Inst., 34, 10, 1094, 1963.

Поступила в редакцию
30.10 1968 г.

Кафедра
ускорителей